ИЗМѢРЕНІЕ
ПЛОЩАДЕЙ, ПОВЕРХНОСТЕЙ
И
ОБЪЕМОВЪ ТѢЛЪ.

180 ЧЕРТЕЖЕЙ ВЪ ТЕКСТѢ.

СОСТАВИЛЪ

В. Корнаковъ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Э. Арнгольда, Литейный проспектъ, № 59.
1898.

Дозволено цензурою, Спб., 29 апрѣля 1898 г.

Въ практической дѣятельности ремесленника, грамотнаго рабочаго и многихъ другихъ лицъ весьма часто встрѣчается необходимость въ опредѣленіи величины площадей, поверхностей и объемовъ тѣлъ, а также и въ нѣкоторыхъ свѣдѣніяхъ о плоскостяхъ. Конечно, всѣ эти знанія можно свести на безсознательное запоминаніе однихъ только формулъ и правилъ, при помощи которыхъ можно рѣшать всѣ вышеуказанные вопросы, *но осмысленное усвоеніе ихъ требуетъ познакомить практиковъ и съ геометрическими основами рѣшеній этихъ вопросовъ*, изложенными, однако жъ, въ общедоступной формѣ, *понятной для всякаго грамотнаго человѣка*. Способъ сознательнаго усвоенія необходимыхъ геометрическихъ истинъ при данныхъ условіяхъ не можетъ быть *умозрительнымъ*, такъ какъ послѣдній требуетъ и много времени и не всегда доступенъ для многихъ людей, которые воспитываются чисто практической дѣятельностью, и умъ которыхъ мало приспособленъ къ отвлеченному мышленію. Въ такихъ случаяхъ сознательное усвоеніе необходимыхъ основъ геометріи возможно только *съ опытною провѣркою ихъ:* измѣреніемъ частей фигуръ, замѣною геометрическихъ плоскостей вещественными, вырѣзанными, напримѣръ, хоть изъ бумаги, повторными ариѳметическими вычисленіями и т. п.

Этотъ способъ усвоенія знаній по измѣренію площадей, поверхностей и объемовъ тѣлъ, по нашему мнѣнію, *необходимъ не только въ жизни, при самообразованіи практиковъ, и въ низшихъ профессіональныхъ школахъ, но даже и во многихъ общеобразовательныхъ учебныхъ заведеніяхъ* и особенно въ младшихъ классахъ ихъ, гдѣ слабое умственное развитіе учащихся, или недостатокъ времени, не позволяютъ ввести въ програму строго систематическій, хотя и краткій курсъ геометріи.

Въ настоящемъ руководствѣ, впервые, въ видѣ опыта, и предлагается подобный способъ усвоенія практическихъ пріемовъ измѣренія площадей, поверхностей и объемовъ тѣлъ въ тѣсной связи съ усвоеніемъ необходимыхъ основъ планиметріи и стереометріи, но безъ всякихъ умозрительныхъ доказательствъ относительно свойствъ площадей и свойствъ тѣлъ, а вводя одни только наглядные пріемы убѣжденія въ истинности той или другой геометрической теоремы *).

Для пополненія курса, нами введенъ въ руководство еще одинъ отдѣлъ, построеніе равновеликихъ фигуръ, который, конечно, рѣже чѣмъ всѣ остальные, изложенные въ книгѣ, встрѣчаются въ обыкновенной практикѣ; но нѣкоторыя части этого отдѣла также имѣютъ часто большое значеніе при различныхъ вычисленіяхъ, какъ напр. нѣкоторыя примѣненія теоремы Пиѳагора.

По предложенію практиковъ, въ курсъ введены нами и свѣдѣнія для вычисленія вѣса тѣлъ по данной плотности и объему и примѣрная таблица вѣса листового матеріала различныхъ металловъ. Также помѣщены въ руководствѣ и нѣкоторыя понятія о неправильныхъ многогранникахъ, объ измѣреніи объемовъ тѣлъ, рѣдко встрѣчающихся въ обыкновенной практикѣ, и описанія приборовъ, употребляемыхъ при разбивкѣ частей предметовъ по плану на матеріалѣ. Всѣ эти свѣдѣнія, какъ добавочныя къ курсу, мы позволили себѣ напечатать болѣе мелкимъ шрифтомъ и соединить ихъ въ послѣдній V отдѣлъ книги.

Въ продолженіи всего курса, тѣ части его, гдѣ требуются по ариѳметикѣ свѣдѣнія о пропорціяхъ, мы изложили ихъ исключительно на примѣрахъ, что даетъ возможность, какъ показалъ намъ опытъ, вполнѣ созна-

---

*) Подобный курсъ измѣренія площадей, поверхностей и объемовъ тѣлъ въ первый разъ съ большимъ успѣхомъ былъ проведенъ нами на практикѣ въ дополнительномъ отдѣленіи одной воскресной школы для ремесленныхъ учениковъ.

тельно усвоить эти свѣдѣнія изъ геометріи безъ знанія курса пропорцій, тѣмъ болѣе, что этотъ отдѣлъ ариѳметики въ элементарныхъ курсахъ или совсѣмъ не проходится, или проходится слишкомъ кратко, между тѣмъ какъ при различныхъ работахъ съ пропорціональными величинами приходится сталкиваться весьма часто.

Согласно намѣченнымъ цѣлямъ, курсъ настоящаго руководства предлагается вести такимъ образомъ:

1) При объясненіи измѣренія площадей предлагаемъ не ограничиваться одними только чертежами, но обязательно вырѣзывать фигуры изъ бумаги, или еще лучше изъ тонкой папки, и каждый разъ дѣйствительнымъ измѣреніемъ ихъ частей находить необходимыя числа для вычисленія площадей фигуръ.

2) При вычерчиваніи равновеликихъ фигуръ необходимо вычисленіемъ провѣрять равномѣрность ихъ площадей. Полезно также задавать при этомъ вычерчиваніе различныхъ фигуръ по различнымъ масштабамъ при помощи инструментовъ и отъ руки на глазъ и превращать ихъ въ другія равномѣрныя фигуры съ точнымъ обозначеніемъ величины нѣкоторыхъ ихъ частей. Примѣръ такого рода работъ представляетъ задача № 13 (II отдѣлъ, стр. 36). Также необходимо при изученіи этого отдѣла производить иногда и одни только ариѳметическія вычисленія, чтобы ученики пріобрѣли бы навыкъ находить равновеликія фигуры и ихъ части по одной записи чиселъ. Подобную работу представляетъ задача № 16, (II отдѣлъ, стр. 36).

3) При выясненіи теоремы Пиѳагора предлагается произвести хоть одинъ разъ провѣрку истинности ея такъ, какъ указано въ руководствѣ, при чемъ самое наложеніе вырѣзанныхъ изъ бумаги треугольниковъ и квадрата легко можетъ быть произведено на классной доскѣ при помощи кнопокъ.

4) При прохожденіи взаимнаго положенія плоскостей и прямыхъ, относительно плоскости полезно употреблять модели, сдѣланныя изъ папки, проволоки и нитокъ. По нашему мнѣнію, только такимъ путемъ и можно развить воображеніе, необходимое для яснаго представленія различныхъ сѣченій тѣлъ, а также и взаимнаго положенія линій и плоскостей въ пространствѣ. Это развитіе воображенія крайне важно для подготовки учащихся къ занятіямъ проекціоннымъ черченіемъ.

5) При изложеніи отдѣла объ измѣреніи поверхностей и объемовъ тѣлъ необходимо пользоваться моделями и сѣтками тѣлъ, вырѣзанными изъ папки, а также попутно и черченіемъ самыхъ сѣтокъ, и склеиваніемъ тѣлъ, для чего, конечно, слѣдуетъ на одномъ тѣлѣ показать всѣ практическіе пріемы вырѣзыванія изъ папки сѣтки, правильное сгибаніе ея по ребрамъ, а также и самое склеиваніе *). Когда ученики пріобрѣтутъ навыкъ въ измѣреніи поверхностей и объемовъ отдѣльныхъ тѣлъ, то слѣдуетъ перейти къ вычисленіямъ поверхности и объемовъ различныхъ соединеній тѣлъ между собою, а также и къ различнымъ вычисленіямъ по одной записи чиселъ.

6) Желательно, чтобы при прохожденіи предлагаемаго курса всѣ измѣрительные и другіе приборы, упоминаемые въ руководствѣ, предлагались бы самимъ ученикамъ для пользованія ими на матеріалѣ; такъ, напримѣръ, при объясненія столярнаго наугольника желательно имѣть этотъ приборъ и обрубокъ доски, и на нихъ въ классѣ и показать практическое употребленіе наугольника. Только при этомъ условіи въ ученикахъ и разовьется нѣкоторый навыкъ къ практическому измѣренію формъ и употребленію инструментовъ, а слѣдовательно, и цѣль курса будетъ достигнута. Конечно, при этомъ

---

*) Для правильнаго сгибанія необходимо всегда нѣсколько надрѣзать линіи сгиба, для возможности изъ сѣтки склеить самое тѣло необходимо по линіи соединенія двухъ реберъ подклеивать съ внутренней стороны полоски бумажки.

нужно выяснить ученикамъ и то практическое правило, что прежде чѣмъ употреблять какой-нибудь приборъ, нужно его провѣрить, такъ какъ продажные приборы, и особенно дешевые, иногда бываютъ невѣрные, а слѣдовательно и негодные къ употребленію. Повѣрка приборовъ указана при описаніи ихъ въ руководствѣ.

7) Для развитія глаза учащихся въ опредѣленіи величины геометрическихъ формъ и взаимнаго положенія ихъ частей весьма полезно въ продолженіи курса задавать имъ соотвѣтствующія задачи и упражненія, и провѣрять ихъ каждый разъ послѣ рѣшенія того или другого заданія приборами и болѣе или менѣе точными вычисленіями.

8) Для нѣкоторыхъ частей курса, какъ напримѣръ, при измѣреніи площади эллипса, поверхности шара, объема его и т. п., по невозможности найти для ихъ объясненія какую-либо опытную провѣрку, приняты нами только однѣ формулы и вычисленія. Но въ продолженіи курса не мѣшаетъ ученикамъ высказать, что въ точныхъ математическихъ наукахъ имѣются и для этихъ случаевъ измѣренія самыя точныя и ясныя доказательства, но которыя недоступны имъ вслѣдствіе недостаточной ихъ подготовки по математикѣ.

Предлагаемое руководство предназначается главнымъ образомъ для учащихся въ низшихъ профессіональныхъ школахъ и въ низшихъ классахъ нѣкоторыхъ общеобрзовательныхъ учебныхъ заведеній и учрежденій всѣхъ типовъ, за исключеніемъ только агрономическихъ школъ. Вотъ почему при изложеніи отдѣла объ измѣреніи площадей нами умышленно выпущены статьи о дѣленіи площадей фигуръ на равныя и неравныя части, а также и практическіе способы измѣренія участковъ земли по плану и приблизительныя измѣренія объемовъ различныхъ предметовъ, встрѣчающихся въ сельскомъ хозяйствѣ: стоговъ, копенъ и т. п. Для низшихъ агрономическихъ школъ нами составлено и уже готовится къ изданію особое руководство. Также обращаемъ вниманіе гг. преподавателей и на то, что многія свѣдѣнія, необходимыя для прохожденія предлагаемаго курса, какъ напримѣръ, свойства линій и фигуръ, выраженіе длины окружности и т. п., помѣщены въ нашемъ руководствѣ: «Азбука графической грамотности», въ которомъ изложенъ практическій курсъ линейнаго черченія съ необходимыми свѣдѣніями изъ геометріи, но безъ всякихъ умозрительныхъ доказательствъ, а также вводятся въ курсъ одни только наглядные пріемы убѣжденія въ вѣрности той или другой геометрической истины. Такимъ образомъ настоящее руководство составляетъ какъ бы дополненіе къ вышеуказанной книгѣ.

Считаемъ долгомъ заявить, что при составленіи предлагаемаго руководства мы пользовались слѣдующими пособіями: 1) *Соннэ*. Геометрія теоретическая и практическая (переводъ Прохорова); 2) *Вулихъ*. Краткій систематическій курсъ геометріи, и 3) *Малининъ*. Руководство геометріи для городскихъ училищъ.

Въ заключеніе почтительнѣйше прошу гг. преподавателей геометріи и графическихъ искусствъ, а также и другихъ свѣдущихъ лицъ, имѣющихъ какое-либо отношеніе къ вопросу объ измѣреніи площадей, поверхности и объемовъ тѣлъ, удостоить меня указаніемъ на всѣ недостатки предлагаемаго руководства и на болѣе лучшіе практическіе способы и пріемы для рѣшенія многихъ изложенныхъ въ немъ вопросовъ, чтобы я имѣлъ возможность исправить и дополнить все указанное при слѣдующемъ изданіи. Всякое такое указаніе практиковъ будетъ принято мною съ глубокою благодарностью и можетъ быть сообщено путемъ печати, или письменно, по слѣдующему адресу: Владимірскій проспектъ, 21.

В. Корнаковъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Отдѣлъ I.

Измѣреніе площадей.

1. Измѣреніе площадей. ***Часть плоскости, ограниченная контуромъ какой либо фигуры, называется площадью этой фигуры.*** Весьма часто приходится судить о величинѣ площадей различныхъ фигуръ, а для этого нужно умѣть измѣрять ихъ.

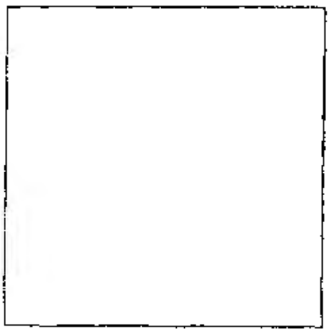
Измѣрить площадь какой либо фигуры значитъ узнать, сколько разъ въ ней содержится другая площадь, принятая за единицу мѣры; слѣдовательно, всякая площадь измѣряется площадью же. За единицу мѣры для измѣренія площадей обыкновенно принимаютъ площадь квадрата, у котораго каждая сторона равна какой нибудь линейной единицѣ мѣры. Такимъ образомъ единицами измѣренія площадей будутъ: *квадратный дюймъ* (чер. 1), т. е. площадь квадрата, у котораго каждая сторона равняется линейному дюйму; *квадратный вершокъ* (чер. 2), т. е. такой квадратъ, у котораго сторона равняется линейному вершку; *квадратный футъ, кв. сажень, кв. верста, квадр. сантиметръ* и т. п.



Чер. 1.

Понятно, что большія площади измѣряются и большими квадратными мѣрами, а малыя площади—малыми квадратными мѣрами; такъ, напримѣръ, площадь двора измѣряется квадратными саженями, а площадь классной доски—квадратными футами, или даже квадр. вершками.

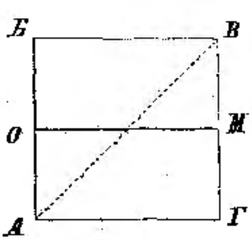
Для измѣренія площади какой нибудь фигуры, напримѣръ, площади пола какой либо комнаты квадратными аршинами, мы должны были бы взять одинъ квадратный аршинъ, начерченный и вырѣзанный, напримѣръ, хоть изъ бу-



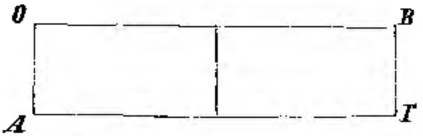
Чер. 2.

маги, и откладывать его на полу столько разъ, сколько разъ онъ помѣстится. Конечно, этотъ способъ измѣренія площадей и неудобенъ, и невсегда возможенъ *), а потому измѣряютъ площади иначе: ***количество квадратныхъ мѣръ, заключающихся въ какой либо площади, находятъ всегда путемъ вычисленія.*** Прежде чѣмъ научиться измѣрять площади различныхъ фигуръ, познакомимся сначала съ равновеликими фигурами.

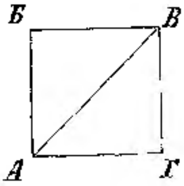
2. Равновеликія фигуры. Возьмемъ какой нибудь квадратъ *АБВГ* (чер. 3), вырѣжемъ его изъ бумаги, разрѣжемъ пополамъ по линіи *ОМ* и соединимъ эти половины, какъ показано на чер. 4. Тогда мы получимъ прямоугольникъ *АОВГ*, составленный изъ половинокъ даннаго квадрата. Такъ какъ при этомъ мы не прибавили и не убавили бумаги, то, конечно, площадь этого прямоугольника равна площади даннаго квадрата, хотя сами фигуры при наложеніи и не сольются вмѣстѣ, т. е. не равны между собою. ***Такія фигуры, которыхъ площади равны между собою, называются равновеликими или равномѣрными*** **). Если мы данный квадратъ (чер. 5) разрѣжемъ по діагонали *АВ*, то получимъ 2 треугольника: $\Delta\ АБВ$ и $\Delta\ АВГ$. Приложивъ эти полученные треугольники одинъ къ другому такъ, какъ показано на чертежѣ 6, мы получимъ одинъ $\Delta\ АВЕ$, котораго площадь также будетъ равна площади даннаго квадрата; значитъ, квадратъ *АБВГ* и $\Delta\ АВЕ$ будутъ тоже равновелики.



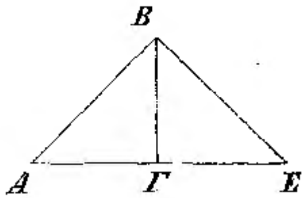
Чер. 3.



Чер. 4.



Чер. 5.



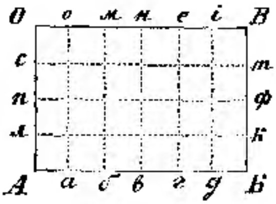
Чер. 6.

*) Такъ, напримѣръ, при измѣреніи площади Δ всегда при вершинахъ его угловъ останутся такія части, на которыхъ никакой квадратъ, какъ бы онъ малъ ни былъ, не помѣстится.

**) При дальнѣйшемъ изложеніи предмета всѣ такія фигуры, для составленія площадей которыхъ требуется одно и тоже количество бумаги, мы будемъ всегда называть равновеликими.

Равныя фигуры всегда равновелики между собою, но равновеликія фигуры, какъ видно изъ приведеннаго примѣра, весьма часто могутъ быть и неравны между собою.

3. Измѣреніе площади прямоугольника. *Примѣръ 1-й. Пусть будетъ данъ прямоугольникъ АОВБ (чер. 7). Узнать его площадь, т. е. сколько въ немъ помѣщается квадратныхъ единицъ, напримѣръ, квадратныхъ дюймовъ.*



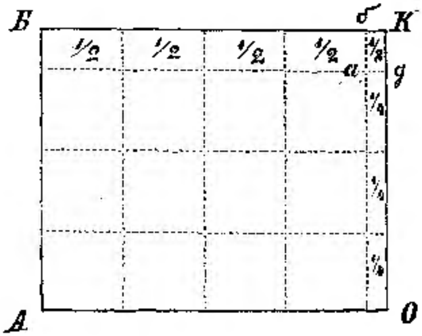
Чер. 7.

Для этого мы измѣримъ линейнымъ дюймомъ его основаніе *АБ*; положимъ, оно заключаетъ въ себѣ 6 линейныхъ дюймовъ. Далѣе, измѣримъ этою же линейною мѣрою высоту *АО*; положимъ, что въ ней заключается 4 дюйма. Теперь, перемноживъ числа 6 и 4 между собою $6 \times 4 = 24$, и получимъ количество квадратныхъ дюймовъ въ этомъ данномъ прямоугольникѣ. Итакъ, данный прямоугольникъ *АОВБ* заключаетъ въ себѣ $6 \times 4 = 24$ квадратныхъ дюйма.

Чтобы убѣдиться въ вѣрности нашего измѣренія, раздѣлимъ высоту *АО* даннаго прямоугольника на дюймы, т. е. на 4 равныя части, и черезъ всѣ точки дѣленія: *л*, *п*, *с* проведемъ прямыя: *лк*, *пф* и *ст*, параллельныя основанію *АБ* прямоугольника. Тогда, какъ видно изъ чертежа, весь прямоугольникъ раздѣлится на 4 равныя продольныя полоски: *АлкВ*, *лпфк*, *пстф* и *сОВт* и у каждой изъ нихъ основаніе будетъ равно основанію *АБ* даннаго прямоугольника, а высота=линейному дюйму. Всѣ эти полоски будутъ равны между собою, въ чемъ и можемъ убѣдиться простымъ наложеніемъ ихъ одну на другую, предварительно вырѣзавъ данный прямоугольникъ изъ бумаги и разрѣзавъ его по линіямъ: *лк*, *пф* и *ст*. Если теперь раздѣлимъ основаніе *АВ* даннаго прямоугольника на дюймы, т. е. на 6 равныхъ частей, и проведемъ черезъ всѣ точки дѣленія: *а*, *б*, *в*, *г*, *д* прямыя: *ао*, *бм*, *вн*, *ге* и *ді*, параллельныя высотѣ *АО* даннаго прямоугольника, то, какъ видно изъ чертежа, каждая полученная продольная полоска раздѣлится на 6 равныхъ квадратовъ. Каждый полученный квадратъ будетъ имѣть сторону въ 1 дюймъ, значитъ, это будетъ квадратный дюймъ, т. е. принятая единица измѣренія площади даннаго прямоугольника. Итакъ, площадь даннаго прямоугольника заключаетъ въ себѣ 4 полоски и каждая въ 6 квадр. дюймовъ или $4 \times 6 = 24$ квадр. дюйма, и если бы мы стали дѣйствительно накладывать квадратные дюймы на площадь даннаго прямоугольника, то ихъ помѣстилось бы въ немъ 24, т. е. наложеніемъ узнали бы то, что узнали выше и простымъ вычисленіемъ.

Вычисленіемъ можно узнать точное количество квадратныхъ мѣръ, заключающихся въ прямоугольникѣ, и въ томъ случаѣ, если его основаніе и высота содержатъ не цѣлое количество линейныхъ мѣръ, а съ долями ихъ.

Примѣръ 2-ой. Пусть будетъ данъ прямоугольникъ АБКО (чер. 8). Узнать сколько въ немъ содержится квадратныхъ единицъ, напримѣръ, квадратныхъ сантиметровъ.



Чер. 8.

Измѣримъ сначала его основаніе AO и высоту $AБ$ линейными сантиметрами. Положимъ, $AO=4^1/_4$ сант., а $AБ=3^1/_2$ сант. Перемноживъ эти полученныя числа $4^1/_4 \times 3^1/_2$, мы получимъ число $14^7/_8$, которое и выражаетъ количество квадратныхъ сантиметр., содержащихся въ площади даннаго прямоугольника. Итакъ, данный прямоугольникъ $ABKO=14^7/_8$ квад. сантиметр.

Чтобы убѣдиться въ вѣрности нашего измѣренія, раздѣлимъ основаніе AO и высоту AB даннаго прямоугольника на сантиметры и черезъ всѣ точки дѣленія проведемъ въ данномъ чертежѣ прямоугольника параллельныя линіи. Весь данный прямоугольникъ, какъ видно изъ чертежа, этими линіями раздѣлится, а значитъ, и будетъ содержать въ себѣ: 1) 12 цѣлыхъ кв. сантим., 2) 4 части по $^1/_2$ квадр. сантим., что составитъ 2 цѣлыхъ квадр. сант., 3) 3 части по $^1/_4$ квадр. сантим., что составитъ $^3/_4$ квадр. сантим., и 4) часть *абкд*, которая составляетъ $^1/_4$ часть отъ $^1/_2$ квадр. сантим., т. е. $^1/_8$ квадр. сантим. Итакъ, мы видимъ, что въ данномъ прямоугольникѣ помѣщается (12 кв. с.$+$2 кв. с.$+^3/_4$ кв. с.$+^1/_8$ кв. с.)$=14^7/_8$ квад. сантим. Значитъ, если бы стали дѣйствительное накладывать на данный прямоугольникъ квадратные сантиметры, то ихъ помѣстилось бы ровно $14^7/_8$ квад. сант., т. е. столько же, сколько узнали и раньше простымъ вычисленіемъ.

Такъ какъ изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что мы всегда узнаемъ точное количество квадратныхъ мѣръ, заключающихся въ площади прямоугольника, если число линейныхъ мѣръ его основанія умножимъ на число линейныхъ мѣръ его высоты, то поэтому и принято слѣдующее короткое выраженіе площади всякаго прямоугольника: ***площадь прямоугольника равняется произведенію основанія на высоту.*** Замѣтимъ, что какъ это выраженіе площади прямоугольника, такъ и послѣдующія выраженія площадей различныхъ фигуръ, нужно всегда понимать условно, а именно: это значитъ, что для измѣренія площади прямоугольника нужно смѣрить одинаковою линейною мѣрою основаніе и высоту даннаго прямо-

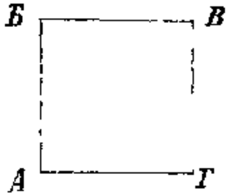
угольника, затѣмъ—перемножить эти числа между собою, и только полученное произведенiе дастъ намъ число квадратныхъ мѣръ въ данномъ прямоугольникѣ.

Если условно выразить буквами части прямоугольника: буквою $П$— его площадь, буквою $а$—его основанiе и буквою $к$— его высоту, то получимъ такое короткое условное выраженiе площади прямоугольника (формулу):

$$П = а \times к \;{}^{*)}$$

4. Измѣренiе площади квадрата. *Пусть будетъ данъ квадратъ АБВГ. Узнать его площадь (черт. 9).*

Такъ какъ квадратъ есть тотъ-же прямоугольникъ, у котораго только всѣ стороны равны между собою, то, значитъ, для измѣренiя его площади достаточно измѣрить только одну его сторону $АГ$. Положимъ, въ ней содержится 7 дюймовъ; въ сторонѣ $АБ$ тоже будетъ 7 дюймовъ, слѣдовательно, площадь этого квадрата равняется $7 \times 7 = 49$ квадратнымъ дюймамъ. Если возьмемъ другой, третiй и т. д. квадраты, то также вычислимъ ихъ площади. Итакъ, *площадь квадрата равняется сторонѣ, умноженной на самое себя*, или $П = а \times а$.



Чер 9.

Произведенiе числа самого на себя называется квадратомъ этого числа; такимъ образомъ, чтобы найти квадратъ какого нибудь числа (возвысить въ квадратъ), надо это число умножить само на себя; напримѣръ, квадратъ 3 будетъ $3 \times 3 = 9$; квадратъ $6 \times 6 = 36$ и т. п.; вмѣсто того чтобы писать 3×3 и 6×6 и т. п., пишутъ такъ: 3^2, 6^2 и выговариваютъ 3 въ квадратѣ, 6 въ квадратѣ и т. п. На основанiи этого можно для измѣренiя площади квадрата принять такое выраженiе: *площадь квадрата равняется квадрату его стороны*, или $П = а^2$.

Чтобы по данной площади квадрата найти длину его стороны, то надо отыскать число, которое, взятое въ квадратъ, равнялось-бы числу квадратныхъ мѣръ въ площади; напримѣръ, если площадь квадрата равна 144 квадратнымъ дюймамъ, то его сторона будетъ 12 дюймовъ, потому что $12 \times 12 = 144$. Число, которое, будучи возведено въ квадратъ, даетъ данное число, называется квадратнымъ корнемъ даннаго числа; такъ, напримѣръ, число 9 имѣетъ квадрат-

*) Во всѣхъ слѣдующихъ подобныхъ короткихъ условныхъ выраженiяхъ (въ формулахъ) площадей фигуръ, мы будемъ обозначать буквами. $а$ и $в$—основанiя фигуръ, $к$—высоту фигуръ, $т$ — число сторонъ правильнаго многоугольника, $н$ — апоѳему его, $Р$ и $р$ — радiусы круговъ, $П$—площадь фигуръ. $д$—периметръ правильнаго многоугольника, $с$ — среднюю линiю трапецiи, $о$—длину распрямленной дуги окружности и $О$—длину окружности.

ный корень 3, такъ какъ $9 = 3 \times 3$; квадратный корень 25 будетъ 5; квадратный корень 49 будетъ 7 и т. п. Дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному квадрату узнается его корень, называется извлеченіемъ квадратнаго корня изъ даннаго числа. Это дѣйствіе имѣетъ свой знакъ $\sqrt{}$, напримѣръ, $\sqrt{144} = 12$.

5. Таблица квадратныхъ мѣръ. На основаніи вышеизложеннаго можно составить слѣдующую таблицу принятыхъ въ Россіи квадратныхъ мѣръ:

1 кв.	миля	имѣетъ	$7 \times 7 = 49$ кв. верстъ.
1 »	верста	»	$500 \times 500 = 250000$ кв. саж.
1 »	сажень	»	$3 \times 3 = 9$ кв. аршинъ.
1 »	аршинъ	»	$16 \times 16 = 256$ кв. вершк.
1 »	сажень	»	$7 \times 7 = 49$ кв. фут.
1 »	футъ	»	$12 \times 12 = 144$ кв. дюйма.
1 »	аршинъ	»	$28 \times 28 = 784$ кв. дюйма.
1 »	дюймъ	»	$10 \times 10 = 100$ кв. лин.

При измѣреніи большихъ участковъ земли, какъ напримѣръ, при измѣреніи имѣній, уѣздовъ и т. п. употребляется *десятина*. *Десятиною называется прямоугольникъ, площадь котораго равняется 2400 кв. саженъ;* длина и ширина (основаніе и высота) прямоугольника могутъ быть различны, лишь-бы ихъ произведеніе было равно 2400 кв. саж.; такъ: $240 \times 10 = 2400$, $120 \times 20 = 2400$; $80 \times 30 = 2400$, $60 \times 40 = 2400$, $160 \times 15 = 2400$; большею частью употребляются десятины длиною въ 80 или 60, а шириной въ 30 или 40 саж. Десятина въ 2400 кв. саж. называется казенной, потому что мѣстами употребляется еще экономическая десятина въ 3200 кв. саж. Огромныя пространства суши, какъ напримѣръ государства, губерніи и т. п., измѣряются квадратными верстами и квадратными милями.

Для измѣренія небольшихъ площадей въ послѣднее время стали иногда употреблять у насъ такъ называемыя квадратныя мѣры десятичной системы. Въ этой системѣ принята единица—квадратный метръ, т. е. такой квадратъ, у котораго сторона равняется 1 метру.

1 кв.	метръ	имѣетъ	$10 \times 10 = 100$ кв. дециметр.
1 »	дицим.	»	$10 \times 10 = 100$ » сентиметр.
1 »	сентим.	»	$10 \times 10 = 100$ » миллиметр.

значитъ, 1 кв. метръ $= 10 \times 10 = 100$ кв. дицим $100 \times 100 = 10000$ кв. сентим. $10000 \times 100 = 1000000$ кв. миллиметр.

Для измѣренія полей въ этой системѣ за единицу площади

принять квадратный декаметръ, т. е. квадратъ, у котораго сторона = декаметру (10 метрамъ). Такой квадратный декаметръ называется аръ.

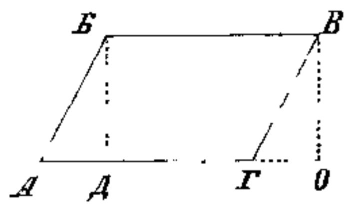
$$\text{аръ} = 1\text{кв. декаметру} = 10 \times 10 = 100 \text{ кв. метр.}$$
$$\text{гектаръ} = 10 \times 10 = 100 \text{ аръ}$$
$$\text{миріаръ} = 10 \times 10 = 100 \text{ гектаръ;}$$

значитъ, миріаръ $= 10 \times 10 = 100$ гектаръ $= 100 \times 100 = 10000$ аръ.

Квадратный метръ составляетъ $^1/_{100}$ части ара, и потому онъ называется иначе—сентіаръ.

6. Измѣреніе площади параллелограмма. *Данъ параллелограммъ АБВГ. Узнать его площадь (черт. 10).*

Проведемъ въ данномъ параллелограмѣ высоту *БД* и вырѣжемъ его изъ бумаги. Затѣмъ, отрѣзавъ отъ него прямоугольный △ *АБД*, приставимъ его съ правой стороны такъ, чтобы линія *АБ* совпала съ равною ей линіею *ВГ*, т. е., чтобы отрѣзанный △ *АВД* принялъ-бы положеніе △ *ГВО*.



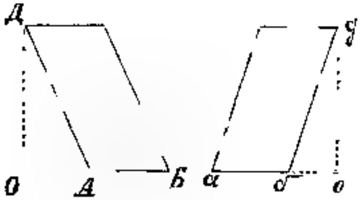
Чер. 10.

Тогда мы видимъ, что изъ оставшейся трапеціи *ДВВГ* и △*ГВО* составится прямоугольникъ *ДВВО*, у котораго основаніе *ДО* равно основанію *АГ* даннаго параллелограмма, и высота *БД* равна высотѣ *БД*. Итакъ, мы видимъ, что данный параллелограммъ *АБВГ* по площади равновеликъ полученному прямоугольнику *ДВВО*, имѣющему съ нимъ равныя основанія и высоту; а площадь прямоугольника, какъ намъ уже извѣстно, равняется произведенію основанія на высоту, значитъ, площадь даннаго параллелограмма равняется тоже произведенію его основанія на высоту, и если, напримѣръ, *АГ* = 6 вершк., а *БД* = 5 вершк., то, значитъ, площадь даннаго параллелограмма *АБВГ* = *АГ* × *БД* = 6 × 5 = 30 квадр. вершк.

Если возьмемъ другой, третій и т. д. параллелограммъ, то также можемъ вычислить его площадь. Итакъ, ***площадь параллелограмма равняется произведенію основанія на высоту***, или $П = а \times к$.

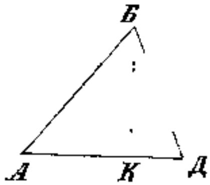
На этомъ основаніи, чтобы узнать площадь какого нибудь параллелограмма, то нужно измѣрить одинаковою линейною мѣрою его основаніе и высоту, и полученныя числа перемножить между собою; произведеніе и дастъ количество квадратныхъ мѣръ его площади; такъ, напримѣръ, если въ основаніи какого либо параллелограмма будетъ содержаться 9 вершковъ, а въ высотѣ 4, то его площадь будетъ равняться 9 × 4 = 36 квадратнымъ вершкамъ.

Если возьмемъ два параллелограмма (чер 11), у которыхъ будутъ равныя основанія $АБ = аб$ и равныя высоты $ДО = до$, то, вычисляя площади этихъ параллелограммовъ, мы увидимъ, что въ нихъ будетъ содержаться и одинаковое количество квадратныхъ мѣръ, т. е. эти параллелограммы будутъ равновелики между собою; слѣдовательно, *два параллелограмма или параллелограммъ и прямоугольникъ, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, равновелики между собою.*

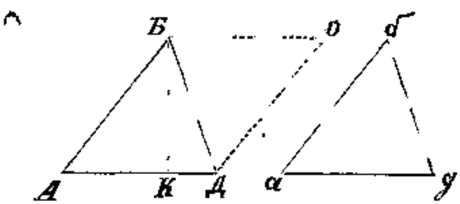


Чер. 11.

7. Измѣреніе площади треугольника. *Данъ △ АБД. Узнать его площадь (чер. 12).*



Чер. 12.



Чер. 13,

Вырѣзавъ изъ бумаги (чер. 13) два равныхъ данныхъ треугольника: $\Delta АБД$ и $\Delta абд$, и приложивъ ихъ одинъ къ другому такъ, какъ показано на чертежѣ, т. е. чтобы сторона $БД$ слилась съ равною ей стороною $бд$, мы получимъ параллелограммъ $АБОД$, площадь котораго будетъ равна произведенію основанія $АД$ на высоту $БК$, т. е. $АД \times БК$, и, если $АД$ напримѣръ $= 8$ дюйм. а $БК = 7$ д., то площадь паралл. $АБОД = 8 \times 7 = 56$ квадр. дюйм. Такъ какъ данный $\Delta АБД$ составляетъ половину полученнаго параллелограмма, то, значитъ, площадь его равняется половинѣ этого произведенія основанія на высоту, т. е. пл. $\Delta АБД = \frac{АД \times БК}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ квадр. дюйм. Если возьмемъ другой, третій и т. д. треугольники, то подобнымъ же образомъ можемъ вычислить его площадь; слѣдовательно, *площадь треугольника равняется половинѣ произведенія основанія на высоту*, или $П = \frac{а \times к}{2}$ *).

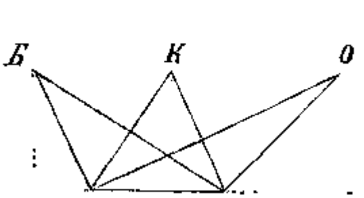
---

*) Кромѣ этого выраженія площади треугольника, можно пользоваться еще слѣдующими выраженіями 1) *площадь треугольника равняется основанію, умноженному на половину высоты*, или $П = а \times \frac{К}{2}$; 2) *площадь треугольника равняется высотѣ, умноженной на половину основанія* или $П = \frac{а}{2} \times К$.

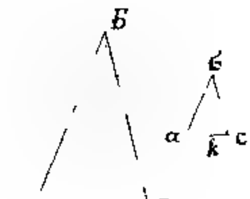
На основаніи изложеннаго, если будетъ данъ какой нибудь Δ и требуется узнать его площадь, то для этого нужно измѣрить одинаковою линейною мѣрою его основаніе и высоту, полученныя числа перемножить между собою, и найденное произведеніе раздѣлить пополамъ. Эта половина произведенія и дастъ намъ количество квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ площади даннаго Δ; такъ, напримѣръ, если въ основаніи его было 9 вершковъ, а въ высотѣ 6, то въ его площади будетъ $\frac{9\times6}{2} = 27$ квадр. вершковъ

Изъ чертежа 13 видно, что ***всякій Δ равновеликъ половинѣ параллелограмма или прямоугольника, имѣющихъ съ нимъ одно основаніе и высоту.***

Если возьмемъ нѣсколько треугольниковъ (чер. 14) Δ *АБД*, Δ *АКД* и Δ *АОД*, у которыхъ основаніе одно *АД*, а высоты: *КМ*, *БЕ* и *ОН*, хотя и разныя, но равныя между собою, какъ разстоянія между параллельными линіями *ВО* и *ЕН*, то, значитъ, площади всѣхъ этихъ Δ-овъ выразятся однимъ и тѣмъ же числомъ квадратныхъ мѣръ; такъ, напримѣръ, если *АД* = 8 д., а высота *КМ* = 6 д. (значитъ и *БЕ* — 6 дюйм. и *ОН* = 6 дюйм.), то площадь Δ $АКД = \frac{АД\times КМ}{2} = \frac{8\times6}{2} = 24$ кв. д; площадь Δ $АБД = \frac{АД\times БЕ}{2} = \frac{8\times6}{2} = 24$ кв. д.; площадь Δ $АОД = \frac{АД\times ОН}{2} = \frac{8\times6}{2} = 24$ кв. д. Изъ этого мы видимъ, что ***треугольники, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты,—равновелики.***



Чер 14



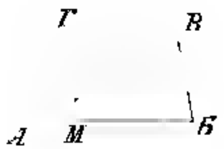
Чер 15

8. Отношеніе площадей подобныхъ треугольниковъ. Возьмемъ 2 подобныхъ треугольника: Δ *абс* ∾ Δ *АБС* (чер. 15) и вычислимъ ихъ площади. Положимъ, основаніе *АС* = 6 сант., а высота *БК* = 9 сант., высота *ас* = 2 сант., а высота *бк* = 3 сант. Площадь Δ $АБС = \frac{6\times9}{2} = 27$ квадр. сант., а площадь Δ $абс = \frac{2\times3}{2} = 3$ кв. сант. Изъ вычисленія мы видимъ, что площадь Δ *АБС* больше площади Δ *абс* въ 27 : 3 = 9 разъ, или въ 3 × 3 раза, т. е. въ квадратъ 3-хъ (3^2), между тѣмъ какъ одна сторона Δ *АБС*, сторона *АС*,

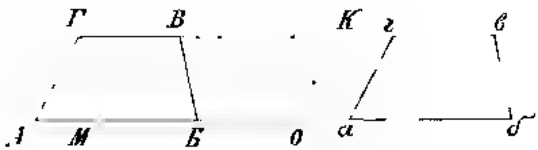
болѣе сходственной стороны Δ *абс*, стороны *ас*, только въ $6:2=3$ раза; значитъ, отношеніе сходственныхъ сторонъ этихъ подобныхъ треугольниковъ будетъ $6:2$, а отношенія ихъ площадей будетъ $(6\times 6):(2\times 2)$, или $6^2:2^2$.

Если будемъ брать подобные треугольники, у которыхъ одна сторона одного треугольника будетъ болѣе или менѣе въ 2, 3, 4, 5, 7 $3^1/_2$ и т. д. раза сходственной стороны другого треугольника, то, вычисливъ ихъ площади, мы также увидимъ, что площадь одного треугольника будетъ болѣе или менѣе площади другого ему подобнаго треугольника не въ 2, 4, 5, 7, $3^1/_2$ и т. д. раза, а въ 2×2, въ 4×4, въ 5×5, въ 7×7, въ $3^1/_2\times 3^1/_2$, и т. д. раза, или иначе въ 2^2, въ 4^2, въ 5^2, въ 7^2, въ $(3^1/_2)^2$ . . . . и т. д. (въ квадрат. чиселъ). Это свойство площадей подобныхъ треугольниковъ можно выразить такъ: ***площадь одного подобнаго треугольника всегда болѣе или менѣе площади другого подобнаго ему треугольника во столько разъ, во сколько квадратъ сходственной стороны одного треугольника болѣе или менѣе квадрата сходственной стороны другого треугольника***, или, иначе говоря, ***площади подобныхъ треугольниковъ относятся между собою какъ квадраты ихъ сходственныхъ сторонъ.***

9. Измѣреніе площади трапеціи. *Дана трапеція АГВБ. Узнать ея площадь (чер. 16).*



Чер. 16



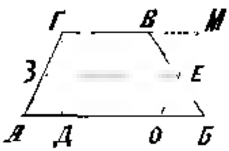
Чер. 17

Вырѣзавъ изъ бумаги двѣ трапеціи, равныя данной: *АГВБ* и *а г в б* (чер. 17) и приложивъ ихъ одну къ другой такъ, какъ показано на чертежѣ, т. е. чтобы точка *б* совпала съ точкою *В* и сторона *вб* совпала бы съ равной ей стороною *Б В*, то мы получимъ параллелограммъ *АГКО*, площадь котораго $= АО \times ГМ$. Эта площадь вдвое больше площади данной трапеціи; слѣдовательно, площ. данной трап. $АГВБ = {}^1/_2$ площ. *АГКО* (чер 17). Но высота *ГМ* параллелограмма та же самая, что и трапеціи, а основаніе его *АО* составляетъ сумму параллельныхъ сторонъ трапеціи: $АО = АБ + БО$, или $АО = АБ + гв$; значитъ, чтобы узнать площадь данной трапеціи *АГВБ*,

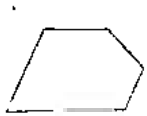
то, нужно сначала измѣрить линейной мѣрой ея параллельныя стороны и высоту; затѣмъ - найти сумму параллельныхъ сторонъ и раздѣлить ее пополамъ, и наконецъ, полученное число умножить на высоту; такъ напримѣръ (черт. 16), если $АБ = 8$ сантим., $ГВ = 6$ сант., а $ГМ = 4$ сантим., то, значитъ, площадь данной трапеціи $АГВВ = \frac{(АБ + ВГ)}{2} \times ГМ = \frac{(8+6)}{2} \times 4 = 28$ квадр. сантиметр.

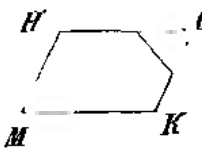
Если возьмемъ другую, третью и т. д. трапецію, то подобнымъ же образомъ можемъ вычислить ея площадь. Итакъ ***площадь трапеціи равняется полусуммѣ параллельныхъ сторонъ ея, умноженной на высоту***, или $П = \frac{(а + в)}{2} \times к$.

Площадь трапеціи можно выразить еще иначе. Раздѣлимъ у данной трапеціи (черт. 18) сторону $ВБ$ пополамъ въ точкѣ $Е$ и проведемъ $ЕО \parallel АГ$; потомъ, вырѣзавъ трапецію изъ бумаги,



Чер. 18.


Чер 19



Чер. 20

отрѣжемъ у нея треугольникъ $БОЕ$; получимъ фигуру, изображенную на черт. 19; приставивъ къ ней отрѣзанный треугольникъ такъ, какъ показано на черт. 20, получимъ параллелограммъ $МНОК$, который будетъ равновеликъ трапеціи $АГВБ$. Параллелограммъ $МНОК$, или равный ему $АГМО$, имѣетъ высоту $ДГ$, т. е. высоту трапеціи; а основаніе его $АО = ЗЕ$ (черт. 18), т. е. равно срединной линіи трапеціи. Площадь этого параллелограмма $АГМО = АО \times ГД$, значитъ, и площадь $АГВБ = АО \times ГД$, или $ЗЕ \times ГД$, т. е. срединной линіи, умноженной на высоту, и если, напримѣръ, $ЗЕ = 8$ вершкамъ, а $ГД = 6$ вершкамъ, то площадь данной трапеціи $АГВБ = 8 \times 6 = 48$ кв. вершк. Итакъ, ***площадь трапеціи равняется срединной линіи, умноженной на высоту, или*** $П = с \times к$.

На основаніи вышеизложеннаго, для измѣренія площади какой-либо трапеціи нужно сначала измѣрить одинаковыми линейными мѣрами оба ея основанія, т. е. параллельныя стороны; положимъ, верхнее основаніе будетъ равно 12 дюймамъ, а нижнее 16 дюймамъ; затѣмъ, нужно сложить эти числа вмѣстѣ и раздѣлить полученную сумму $12 + 16 = 28$ пополамъ, получимъ 14; далѣе, измѣ-

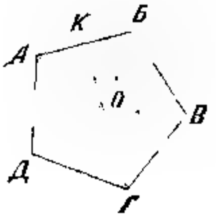
ряемъ высоту трапеціи; положимъ, въ ней будетъ 5 дюймовъ. Помноживъ найденную полусумму 14 на 5, мы и получимъ число $14 \times 5 = 70$ кв. дюймовъ, которое и будетъ выражать количество квадратныхъ мѣръ въ площади данной трапеціи

Если измѣримъ срединную линію этой трапеціи линейными дюймами и полученное число 14 помножить на высоту, т. е. на число 5, то также найдемъ, что площадь данной трапеціи равняется $14 \times 5 = 70$ кв. дюйм.

Изъ чертежа 18 видно, что *трапеція равновелика параллелограмму, у котораго основаніе равно срединной линіи трапеціи, а высота—высотѣ трапеціи.*

10. Измѣреніе площади правильнаго многоугольника.

Данъ правильный пятиугольникъ АБВГД. Узнать его площадь (черт. 21).



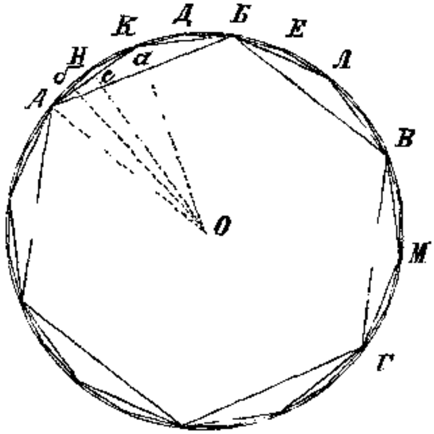
Чер 21.

Соединивъ центръ $О$ даннаго многоугольника со всѣми вершинами, мы получимъ 5 равныхъ треугольниковъ. Площадь одного изъ этихъ треугольниковъ, напримѣръ, $\Delta\ АОБ$, какъ намъ уже извѣстно, будетъ равна $\frac{АБ \times ОК}{2}$, значитъ, площадь всѣхъ 5 треугольниковъ, или площадь даннаго правильнаго многоугольника будетъ въ 5 разъ болѣе этого, или она равна $\frac{5.\ АБ \times ОК}{2}$, но 5 $АБ$ составляетъ периметръ многоугольника, а $ОК$ — его апоѳему; значитъ, площадь даннаго многоугольника равняется половинѣ произведенія его периметра на апоѳему. Если, напримѣръ. сторона $АБ = 4$ дюймамъ, а апоѳема $ОК$=почти $2^3/_4$ дюйм., то площадь многоугольника $АБВГД = \frac{5 \times 4 \times 2^3/_4}{2} = 27^1/_2$ кв. дюйм.

Также можно вычислить величину площади и всякаго другого правильнаго многоугольника. Итакъ, *площадь правильнаго многоугольника равняется половинѣ произведенія его периметра на апоѳему. или* $П = \frac{д \times н}{2}$, или $\frac{т \times а \times н}{2}$, гдѣ буквою $а$ выражена сторона многоугольника. а буквою $т$ число сторонъ его.

На основаніи этого, если, напримѣръ. будетъ данъ правильный 6-угольникъ, у котораго сторона равняется, положимъ, 3 дюймамъ, или 30 линіямъ, а его апоѳема равняется приблизительно 2 дюйм. и 6 линіямъ, или 26 линіямъ, то площадь его будетъ заключать въ себѣ $\frac{6 \times 30 \times 26}{2} = 23$ кв. дюйм. и 40 кв. линіямъ.

11. Измѣреніе площади круга. Если мы возьмемъ произвольный кругъ *О*, впишемъ въ него какой-либо правильный многоугольникъ, напримѣръ, шестиугольникъ *АБВГ*..., у котораго апоѳема будетъ *Оа*, и увеличимъ число его сторонъ вдвое, то получимъ правильный двѣнадцатиугольникъ *АКБЛВМГ*... Какъ видно изъ чертежа, площадь полученнаго правильнаго двѣнадцатиугольника больше площади шестиугольника на 6 треугольниковъ: Δ *АКБ* + Δ *БЛВ* + Δ *ВМГ*... и т. д., и его периметръ и апоѳема *Ос* больше периметра и апоѳемы *Оа*. Если мы удвоимъ число сторонъ двѣнадцатиугольника, то получимъ 24-угольникъ *АНКДБЕЛВ*...; площадь его будетъ болѣе площади 12-угольника на 12 треугольниковъ: Δ *АНК* + + Δ *КДБ* + Δ *БЕЛ*... и т. д.; периметръ его и апоѳема *Об* тоже болѣе периметра и апоѳемы *Ос*. Удваивая такимъ образомъ число сторонъ многоугольника, мы будемъ получать все большія и большія площади; но эти площади никогда не будутъ больше площади круга, онѣ только безконечно приближаются къ площади круга: чѣмъ больше многоугольникъ будетъ имѣть сторонъ, тѣмъ ближе онъ будетъ подходить къ кругу. Периметры этихъ многоугольниковъ и апоѳемы тоже увеличиваются: периметры ихъ приближаются къ окружности, а апоѳемы къ радіусу круга.



Чер. 22.

На этомъ основаніи мы можемъ сказать, что всякій правильный многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ можно принимать за кругъ, а его апоѳему за радіусъ этого круга. Также можно сказать и обратно, что всякій кругъ можно разсматривать, какъ правильный многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ, у котораго периметромъ будетъ окружность, а апоѳемой ея радіусъ.

Изъ этого слѣдуетъ, что ***площадь круга равняется длинѣ окружности, умноженной на половину радіуса, или*** $П = О \times \frac{р}{2}$.
Окружность, какъ намъ извѣстно, выражается: $2\pi р$ *); поэтому пло-

*) Буква π выражаетъ отношеніе окружности къ своему діаметру, а буква $р$—радіусъ окружности. Буква π — $3\frac{1}{7}$.

щадь круга можно выразить такъ: $2\pi p \times \frac{p}{2}$, или, сдѣлавъ умноженіе и сокративъ его, получимъ, что площадь круга $= \pi \times p \times p$ или $\pi \times p^2$. На основаніи этого, чтобы узнать площадь, какого либо даннаго круга, достаточно измѣрить линейной мѣрой только ея радіусъ; положимъ, въ немъ будетъ 14 дюймовъ. Длина окружности его будетъ равняться $2\pi p$, или $2 \times {}^{22}/_7 \times 14 = 88$ дюйм., а его площадь $88 \times {}^{14}/_2 = 616$ квадр. дюймовъ. Умноживъ ${}^{22}/_7$ на p^2 или ${}^{22}/_7 \times 14^2 = {}^{22}/_7 \times 14 \times 14$, получимъ также 616 квад. дюймовъ.

По данной площади круга можно вычислить и длину его радіуса Напримѣръ, пусть будетъ дано, что площадь круга равняется 154 квадр. вершкамъ; значитъ, дано, что $\pi \times p^2 = 154$ квадр. вершк.; когда мы раздѣлимъ 154 на ${}^{22}/_7$, т. е. на π, то получимъ, что $p^2 = 49$, значитъ $p = \sqrt{49} = 7$ вер

Замѣтимъ, что вычисленіе, какъ площади круга, такъ и радіуса его не можетъ быть сдѣлано вполнѣ точно, такъ какъ въ это вычисленіе входитъ длина окружности, отношеніе которой къ діаметру, какъ намъ уже извѣстно, не можетъ быть выражено вполнѣ точно никакимъ числомъ.

12. Отношеніе площадей круговъ. Если радіусъ одного круга будетъ равенъ, напримѣръ, 3 дюймамъ, а радіусъ другого круга 12 дюйм., то площадь перваго $= \pi \times 3^2 = {}^{22}/_7 \times 9 = 28^2/_7$ квад. дюйм., а площадь второго $= \pi \times 12^2 = {}^{22}/_7 \times 144 = 452^4/_7$ кв дюйм.; значитъ, площадь 2-го круга болѣе площади перваго круга въ $452^4/_7 : 28^2/_7 = 16$ разъ, или въ 4×4, т. е. въ 4^2 (въ квадрат. числа), между тѣмъ какъ радіусъ 2-го круга болѣе радіуса 1-го круга только въ $12:3 = 4$ раза; значитъ, отношеніе радіусовъ данныхъ круговъ будетъ $12:3 = 4$, а отношеніе ихъ площадей будетъ $452^4/_7 : 28^2/_7 = 16$.

Если будемъ брать различные круги, у которыхъ радіусъ одного будетъ въ 2, 3, 5, $5^1/_4$, 6 и т. д разъ болѣе или менѣе радіуса другаго, то, вычисляя ихъ площади, мы увидимъ, что всегда площадь одного круга будетъ болѣе или менѣе площади другого круга въ 2×2, въ 3×3, въ 5×5, въ $5^1/_2 \times 5^1/_2$ и т. д. раза, или въ 2^2, въ 3^2, въ 5^2, въ $(5^1/_2)^2$ . . . . и т. д. (въ квадраты чиселъ). Это свойство площадей круговъ различныхъ радіусовъ можно выразить такъ. *площадь одного круга всегда болѣе или менѣе площади другаго круга во столько разъ, во сколько квадратъ радіуса одного круга болѣе или менѣе квадрата радіуса другого круга.* или, иначе говоря, *площади круговъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радіусовъ.*

13. Измѣреніе площади сектора, сегмента и кольца. Секторъ можно разсматривать, какъ $\triangle$, у котораго основаніемъ служитъ дуга, а высотой радіусъ; поэтому *площадь сектора равняется*

длинѣ его дуги, умноженной на половину радіуса (черт. 23) или $П = o \times \frac{p}{2}$. Напримѣръ, если дуга сектора равняется 45°, а радіусъ — 7 дюймамъ, то, чтобы вычислить площадь его, мы сначала должны узнать длину его дуги въ дюймахъ. Длина всей окружности радіуса въ 7 дюймовъ будетъ $2 \times {}^{22}/_{7} \times 7 = 44$ дюйма; длина одного градуса этой окружности будетъ ${}^{44}/_{360}$, а длина дуги въ 45° будетъ равнятся ${}^{44}/_{360} \times 45 = 5^{1}/_{2}$ дюймамъ. Умноживъ эту найденную длину дуги на половину радіуса, т. е. $5^{1}/_{2} \times {}^{7}/_{2}$, мы и получимъ площадь даннаго сектора $= 19^{1}/_{4}$ квадр. дюйм.

Чтобы опредѣлить площадь какого нибудь сегмента, напримѣръ, площадь сегмента *АБД* (черт. 23), то надо изъ площади сектора *АОБД* вычесть площадь треугольника *АОБ*.

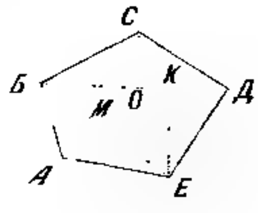
Чтобы вычислить какую либо часть площади круга, заключенную между двумя концентрическими окружностями, т. е. площадь кольца (черт. 24), то сначала нужно вычислить площадь большаго круга, потомъ площадь малаго круга, и наконецъ, изъ одной площади большей, вычесть другую меньшую. Для вычисленія площади кольца можно еще пользоваться такимъ условнымъ выраженіемъ: ***площадь кольца равняется*** π, ***т. е., числу*** $3^{1}/_{7}$, ***умноженному на произведеніе суммы радіусовъ на ширину кольца***, или $П = \pi \times (P + p) \times e$, гдѣ буквою *e* выражена ширина кольца $(P - p)$.



Чер. 23



Чер. 24



Чер 25.

14. Измѣреніе площади неправильнаго многоугольника. Такъ какъ всякій многоугольникъ (черт. 25) можно разбить діагоналями на треугольники, то, значитъ, измѣреніе площади неправильнаго многоугольника можно замѣнить измѣреніемъ площадей тѣхъ треугольниковъ, изъ которыхъ онъ состоитъ, и затѣмъ, найти сумму этихъ площадей, которая и составитъ площадь даннаго неправильнаго многоугольника

Данъ многоугольникъ АБСДЕ. Узнать его площадь (черт. 25). Раздѣливъ данный многоугольникъ діагоналями на 3 треугольника: Δ *АБЕ*, Δ *БДЕ* и Δ *ДБС*, вычислимъ площадь каждаго изъ нихъ.

Пусть $БД = 7^1/_4$ дюйм., $СО = 2$ дюйм., $БЕ = 6$ дюйм., $ЕК = 3^1/_2$ дюйм., $МА = 1^1/_2$ дюйм. Площади этихъ треугольниковъ будутъ равны: площадь $\Delta\ БСД = \frac{БД \times ОС}{2} = \frac{7^1/_4 \times 2}{2} = 7^1/_4$ кв. дюйм.; площадь $\Delta\ БДЕ = \frac{БД \times КЕ}{2} = \frac{7^1/_4 \times 3^1/_2}{2} = 12^{11}/_{16}$ кв. дюйм; площадь $\Delta\ БЕА = \frac{БЕ \times МА}{2} = \frac{6 \times 1^1/_2}{2} = 4^1/_2$ кв. дюйма; значитъ, площадь даннаго многоугольника $АБСДЕ = 7^1/_4 + 12^{11}/_{16} + 4^1/_2 = 24^7/_{16}$ кв. дюйм.

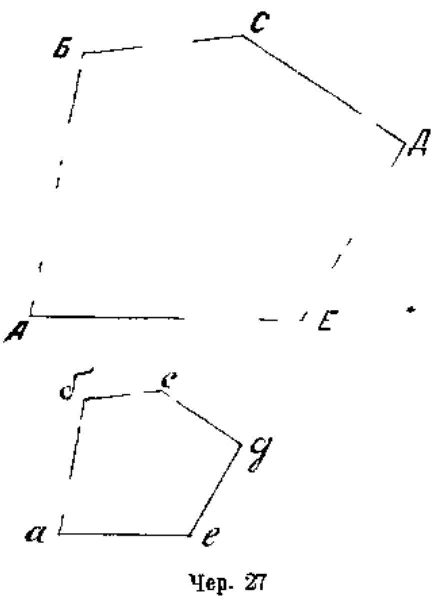


Чер. 26.

Иногда при измѣреніи площади прямолинейной неправильной фигуры разбиваютъ ее не на ΔΔ-и, а на различныя другія фигуры, какъ это видно изъ чертежа 26, и также сначала узнаютъ площадь каждой фигуры отдѣльно, а потомъ уже находятъ ихъ сумму, которая и выразитъ площадь даниой фигуры *).

Итакъ, *площадь неправильнаго многоугольника равняется суммѣ площадей составляющихъ его фигуръ.*

15. Отношеніе площадей подобныхъ многоугольниковъ. Возьмемъ два подобныхъ, многоугольника (черт. 27), мн. *АБСДЕ* и мн. *абсде*, у которыхъ сходственная сторона $АЕ = {}^{24}/_{16}$ дюйм., а сходственная сторона $ае = {}^{12}/_{16}$ дюйм. и вычислимъ ихъ площади. Положимъ, площадь многоугольника $АБСДЕ = {}^{75}/_{32}$ кв. дюйм. или $2^{11}/_{32}$ кв. дюйма, а площадь многоугольника $абсде = {}^{75}/_{128}$ кв. дюйм. Изъ вычисленія мы видимъ, что площадь многоугольника *АБСДЕ* болѣе площади многоугольника *абсде* въ $2^{11}/_{32} : {}^{75}/_{128} = $ въ 4 раза, или въ 2×2 раза, т. е. въ квадратъ 2-хъ (2^2), между тѣмъ какъ сторона *АЕ* многоуг. *АБСДЕ* болѣе сходственной стороны многоуг. *абсде* только въ ${}^{24}/_{16} : {}^{12}/_{16} = 2$ раза; значитъ, отношеніе сходственныхъ сторонъ этихъ подобныхъ многоугольн. будетъ ${}^{24}/_{16} : {}^{12}/_{16} = 2$, а отношеніе площадей этихъ многоугольниковъ будетъ $({}^{24}/_{16} \times {}^{24}/_{16}) : ({}^{12}/_{16} \times {}^{12}/_{16}) = ({}^{24}/_{16})^2 : ({}^{12}/_{16})^2 = 4$.



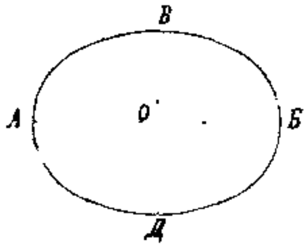
Чер. 27

*) Способъ измѣренія площадей неправильныхъ многоугольниковъ превращеніемъ ихъ сначала въ равномѣрный треугольникъ указанъ во II отдѣлѣ § 21.

Если будемъ брать подобные многоугольники, у которыхъ одна сторона одного многоугольника будетъ болѣе или менѣе въ 3, 4, 5, 6, $3^1/_4$ .... и т. д. раза сходственной стороны другого многоугольника, то, вычисляя ихъ площади, мы увидимъ, что всегда площадь одного многоугольника будетъ болѣе или менѣе площади другого подобнаго ему многоугольника не въ 3, 4, 5, 6, $3^1/_4$ и т. п. раза, но въ 3×3, 4×4, 5×5, 6×6, $3^1/_4 \times 3^1/_4$ . . . и т п. раза, или въ 3^2, въ 4^2, въ 5^2, въ 6^2 $(3^1/_4)^2$... и т. п. (въ квадратъ этихъ чиселъ). Это свойство площадей подобныхъ многоугольниковъ можно выразить такъ: *площадь одного подобнаго многоугольника всегда болѣе или менѣе площади другого подобнаго многоугольника во столько разъ, во сколько квадратъ сходственной стороны одного изъ нихъ болѣе или менѣе квадрата сходственной стороны другого*, или иначе говоря, *площади подобныхъ многоугольниковъ относятся какъ квадраты сходственныхъ сторонъ.*

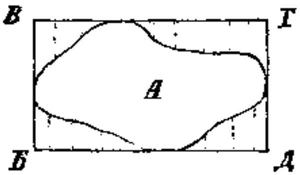
Такъ какъ одноимянные правильные многоугольники всегда подобны, то, значитъ, на основаніи вышеизложеннаго можемъ вывести, что площади правильныхъ одноимянныхъ многоугольниковъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ сторонъ; такъ, напримѣръ, если сторона одного правильнаго пятиугольника болѣе стороны другого правильнаго пятиугольника въ 7 разъ, то площадь перваго будетъ въ 49 разъ болѣе площади другаго; или если, напримѣръ, сторона одного квадрата менѣе стороны другого квадрата въ 4 раза, то площадь перваго менѣе площади другаго въ 16 разъ и т. п.

16. Измѣреніе площади эллипса. *Данъ эллипсъ АБВД* (черт. 28) *и требуется узнать его площадь*. Для вычисленія площади (даннаго) эллипса мы должны сначала смѣрить линейной мѣрой его оси; пусть ось $АБ = 10$ дюйм., а ось $ВД = 7$ дюйм.; затѣмъ, нужно найти полуоси; полуось $ОБ = 5$ дюймамъ, а полуось $ОД$ равна $3^1/_2$ дюйм. Далѣе, перемножимъ эти данныя числа, выражающія длину полуосей между собою. $5 \times 3^1/_2 = 17^1/_2$. Умноживъ, наконецъ, это полученное число еще на π, т. е. на $3^1/_7$, мы найдемъ площадь даннаго эллипса: она будетъ равна: $17^1/_2 \times 3^1/_7$ 55 кв. дюймовъ. Подобнымъ образомъ мы можемъ узнать площадь и всякаго другого эллипса. И такъ, *площадь всякаго эллипса равна произведенію его полуосей, умноженному на* π, т. е. на постоянное отношеніе окружности къ своему діаметру, или $П = (а \times в) \times \pi$, гдѣ буквами $а$ и $в$ выражено полуоси эллипса.



Чер. 28.

17. Измѣреніе площадей неправильныхъ криволинейныхъ фигуръ. *Дана криволинейная фигура A (чер. 29). Узнать ея площадь.*



Чер. 29

Строимъ при помощи соотвѣтствующихъ приборовъ вокругъ данной фигуры прямоугольникъ *БВГД*, такъ чтобы каждая его сторона имѣла одну общую точку съ кривою, ограничивающею площадь фигуры *А*. Затѣмъ, возставляемъ перпендикуляры изъ сторонъ прямоугольника до встрѣчи съ кривою, и настолько близко одинъ отъ другого, чтобы части кривой между этими перпендикулярами можно было бы принять за прямыя линіи, и получимъ рядъ различныхъ фигуръ.

Вычисливъ площадь всего прямоугольника и вычтя изъ него сумму площадей всѣхъ маленькихъ полученныхъ фигуръ, мы узнаемъ площадь данной криволинейной фигуры *А*.

Задачи и упражненія.

1) Вычислить площадь прямоугольника, котораго стороны равны 12 и 8 вершкамъ.

2) Вычислить площадь пола и стѣнъ классной комнаты.

3) Площадь прямоугольника равняется 56 квадрат. саженямъ, а высота его 7 саж. Найти его основаніе.

4) Какъ великъ бокъ квадрата, если его площадь равна 81 квадр. сантиметрамъ?

5) Вычислить площадь параллелограмма, основаніе котораго 1 арш. 5 вер., а высота 6 вершковъ.

6) Сколько нужно досокъ длиною въ 7 арш., а шириною въ 6 верш. для настилки пола комнаты въ 5 сажень длины и 2 саж. 2 арш. ширины?

7) Периметръ ромба = 48 сантим., а высота 6 сант. Чему равна его площадь?

8) Вычислить площадь треугольника, если его основаніе = 1 саж. 5 верш., а высота—2 арш. 10 верш.

9) Площадь прямоугольн. треугольника = 675 кв. д.; одинъ катетъ = 45 д. Чему равенъ другой катетъ?

10) Площадь равносторон. △ равняется 360 квадр. сант., а высота его = 12 сантим. Чему равняется его сторона?

11) Площадь трапеціи = 558 квадр. д. Какъ велика ея высота, если одна изъ параллельныхъ сторонъ = 3 саж. 4 фута, а другая—5 саж. 2 фута?

12) Площадь трапеціи равна 42 кв. верш.; параллельн стороны ея = 13 и 15 вершковъ. Опредѣлить ея высоту.

13) Сторона правильнаго шестиугольника = 12 дюйм., а его апоѳема = приблизительно 10 дюйм. 4 лин. Вычислить его площадь.

14) Опредѣлить площадь круга, если его радіусъ равенъ 1 арш. 12 верш.

15) Найти радіусъ круга, если его площадь = 154 кв. д.?

16) Найти длину окружности, если площадь круга = 616 кв. верш.

17) Вычислить площадь сектора, котораго дуга содержитъ 45°, а радіусъ ея = 3 ф. 6 дюйм

18) Радіусъ двухъ концетрическихъ круговъ равны 7 санти. и 21 сантиметръ. Найти площадь кольца между кругами.

19) Начертить неправильный восьмиугольникъ и вычислить его площадь.

20) Начертить какую-либо криволинейную фигуру и вычислить ея площадь.

21) Площадь △ = 324 квадр. дюйм. Чему равна его высота, если основаніе его = 30 дюйм.?

22) Діаметръ круга = 5 дюйм. Чему равна его площадь?

23) Найти площадь кольца, имѣющаго внутреннюю окружность въ 20 дюйм., а внѣшнюю—въ 35 дюйм.

24) Площадь трапеціи = 198 кв. верш.; параллельныя стороны соотвѣтственно равны 10 и 12 верш. Какъ велика ея высота?

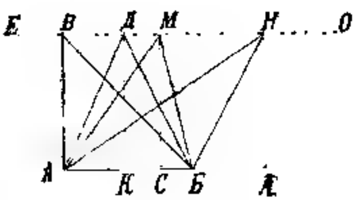
25) Основаніе ромба = $5\frac{1}{2}$ сант., высота его 3 сант. Чему равна его площадь?

Отдѣлъ II.

Построеніе равновеликихъ фигуръ. Увеличеніе и уменьшеніе фигуръ.

18. Построеніе равновеликихъ треугольниковъ. Такъ какъ всѣ треугольники, имѣющіе равныя основанія и равныя высоты, какъ намъ уже извѣстно, равномѣрны, то построеніе треугольниковъ, равномѣрныхъ данному, производится такъ:

Примѣръ 1-й. *Данъ* $\triangle$ *АМБ и требуется построить другой, равнобедренный и равномѣрный данному* (чер. 30).



Чер. 30.

Проводимъ въ данномъ $\triangle$ *АМБ* высоту *МС* и чрезъ точку *М*—линію *ЕО*, параллельную основанію *АБ*. На этой параллельной будутъ лежать вершины всѣхъ треугольниковъ, равномѣрныхъ данному. Раздѣливъ, затѣмъ, основаніе *АБ* даннаго $\triangle$ пополамъ, возставляемъ $\perp$ *КД* къ основанію *АБ*, и точку его *Д*, пересѣченіе съ параллельной *ЕО*, соединяемъ съ точками *А* и *Б*. Полученный $\triangle$ *АДБ* и будетъ равнобедреннымъ искомымъ треугольникомъ, такъ какъ и его основаніе и высота равны основанію и высотѣ даннаго треугольника.

Примѣръ 2-й. *Превратить данный* $\triangle$ *АМБ въ равномѣрный ему прямоугольный треугольникъ* *) (чер. 30).

Возставляемъ $\perp$ *АВ* изъ точки *А* къ линіи *АБ* и точку его *В*, пересѣченіе съ параллельной *ЕО*, соединяемъ съ точкой *Б*. Полученный $\triangle$ *АВБ* и будетъ искомымъ прямоугольнымъ и равномѣрнымъ данному треугольникомъ, такъ какъ $\angle$ *ВАБ* = *d*, по построенію, основаніе *АБ* и высота *АВ* равны основанію и высотѣ даннаго треугольника *АМБ*.

---

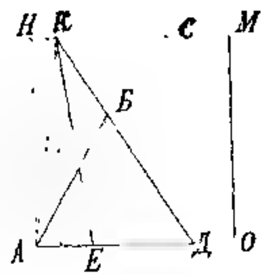
*) Построеніе фигуръ, равномѣрныхъ даннымъ, иначе называется превращеніемъ фигуръ.

Примѣръ 3-й. *Построить тупоугольный* Δ *съ угломъ въ* 120^0 *и равномѣрный данному* Δ *АМВ* (чер. 30).

Сначала при линіи *АБ* строимъ $\angle$ *АБН* $= 120^0 = 1^1/_3\ d$ угла. Далѣе, продолживъ его сторону *БН* до пересѣченія съ линіею *ЕО*, и соединивъ точку *Н* съ точкой *А*, мы и получимъ искомый Δ *АНБ*, равномѣрный данному *АМВ*, такъ какъ у обоихъ равны основанія и равны высоты.

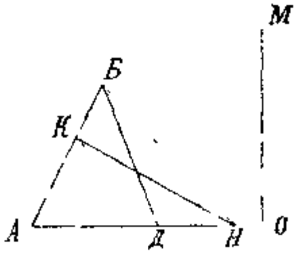
Примѣръ 4-й. *Построить* Δ *съ данной высотой ОМ, равновеликій данному* Δ *АБД* (Чер. 31).

Возставляемъ $\perp$ *АН* изъ точки *А* и на немъ отмѣряемъ *АН* $=$ *ОМ* данную высоту; затѣмъ, проводимъ линію *НС* $\|$ *АД* и продолжаемъ сторону *ДБ* даннаго Δ *АБД* до встрѣчи съ параллельной *НС* въ точкѣ *К*. Далѣе, *соединимъ* точки *К* и *А* прямой *АК* и чрезъ точку *В* проводимъ линію *БЕ* *АК*.



Чер. 31

Соединивъ, наконецъ, точки *К* и *Е* прямой *КЕ*, мы и получимъ искомый Δ *ЕКД*, равномѣрный данному *АБД* и съ данной высотой, такъ какъ прибавля къ Δ *ДБЕ* новый Δ *БЕК*, вмѣсто равномѣрнаго ему Δ *БЕА* [они равномѣрны, потому что у нихъ одно основаніе *ВЕ* и равныя высоты-раастоянія между параллелями *АК* и *ВЕ*] мы и получимъ равновеликія площади. Полученный Δ *ЕКД*, какъ видно изъ чертежа, имѣетъ высоту, равную данной высотѣ *МО*.



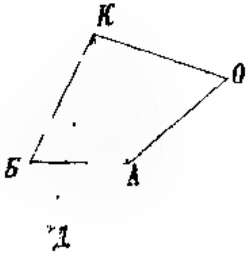
Чер 32.

Примѣръ 5-й. *Построить* Δ *съ даннымъ основаніемъ МО и равномѣрный данному* Δ *АБД* (чер. 32)

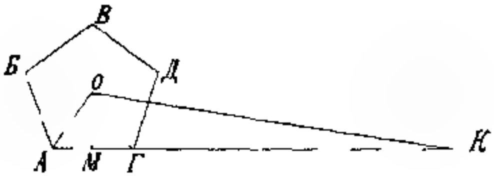
Продолжаемъ основаніе *АД* даннаго Δ *АВД* настолько, чтобы *АН* $=$ *ОМ*, данному основанію искомаго треугольника; затѣмъ, проводимъ прямую *НБ* и ей параллельную *ДК* черезъ точку *Д*. Соединивъ точки *К* и *Н* прямой *НК*, мы и получимъ искомый Δ *АКН*, равномѣрный данному Δ *АБД* и съ даннымъ основаніемъ, такъ какъ, прибавляя къ Δ *АКД* новый Δ *КДН*, вмѣсто равномѣрнаго ему Δ *КДВ* [они равномѣрны, потому что у нихъ одно основаніе *КД* и равныя высоты —разстоянія между параллельными прямыми *КД* и *БН*] мы и получимъ равновеликія площади. Полученный Δ *АНК*, какъ видно изъ чертежа, имѣетъ основаніе *АН*, равное данному основанію *МО*.

19. Построеніе треугольника, равномѣрнаго данному четыреугольнику. *Построить треугольникъ, равномѣрный данному четыреугольнику АБКО* (чер. 33).

Проводимъ діагональ *АК* и этимъ отсѣкаемъ Δ *АКБ*; далѣе, проводимъ чрезъ точку *Б* прямую *БД*, параллельную *АК*, и продолжаемъ сторону *ОА* до пересѣченія ея въ точкѣ *Д* съ полученной параллельной *БД*. Соединивъ точку *К* съ точкой *Д* прямой *КД*, мы и получимъ искомый Δ *ОКД*, равномѣрный данному четыреугольнику *АБКО*, такъ какъ, прибавляя къ Δ *АОК*, вмѣсто отсѣченнаго Δ *АКБ* равномѣрный ему Δ *АКД* (они равномѣрны, потому что у нихъ одно основаніе *АК* и равныя высоты, какъ разстоянія между параллельными прямыми *АК* и *ДБ*), мы и получимъ равномѣрныя площади. Итакъ, площадь Δ *ДКО* = площади даннаго четыр. *АБКО*.



Чер. 33.



Чер. 34.

20. Построеніе треугольника, равномѣрнаго данному многоугольнику.

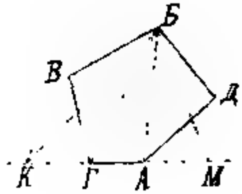
Примѣръ 1-й. *Данъ правильный пятиугольникъ* (чер. 34) *АБВДГ и требуется построить равновеликій ему треугольникъ.* Для этого продолжимъ сторону многоугольника *АГ* и отложимъ прямую *АК*, равную 5 *АГ*, т. е. равную периметру даннаго многоугольника. Соединивъ центръ *О* даннаго правильнаго многоугольника съ точками *А* и *К*, мы и получимъ искомый Δ *АОК*, у котораго высота *ОМ* равна апоѳемѣ даннаго правильнаго многоугольника. Полученный Δ *АОК* будетъ искомымъ, потому что его площадь = $\frac{АК \times ОМ}{2}$, что составляетъ половину произведенія длины периметра даннаго многоугольника на его апоѳему, т. е. количество квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ площади даннаго правильнаго пятиугольника.

Подобнымъ образомъ превращается въ равновеликій прямоугольникъ и всякій другой данный правильный многоугольникъ.

На основаніи вышеизложеннаго можно вывести, что *всякій правильный многоугольникъ равновеликъ треугольнику, у котораго осно-*

ваніе равно периметру многоугольника, а высота равна апоеемѣ многоугольника.

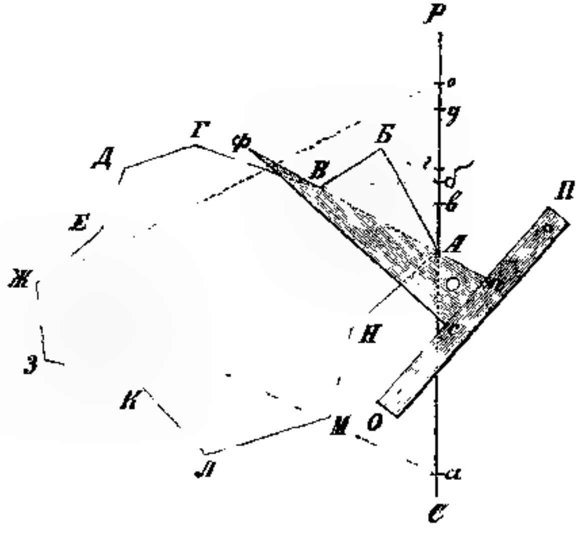
Примѣръ 2-й. *Данъ неправильный многоугольникъ АГВБД* (чер. 35) *и требуется построить равновеликій ему треугольникъ.* Проведя діагональ *БГ* и параллельную ей прямую *КВ* чрезъ точку *В*, продолжимъ сторону *АГ* до пересѣченія ея съ параллельной въ точкѣ *К*; затѣмъ, соединивъ точки *К* и *Б* прямой *КБ*, мы получимъ Δ *БГК*. Замѣнивъ отсѣченный Δ *БГВ* равномѣрнымъ ему Δ *БГК* (они равномѣрны, потому что у нихъ одно основаніе *БГ* и равныя высоты — разстоянія между параллельными прямыми) и прибавивъ этотъ послѣдній къ оставшейся фигурѣ *АГБД*, мы получимъ вмѣсто даннаго пятиугольника четыреугольникъ *АКБД*, который въ свою очередь, какъ показано на чертежѣ, превратимъ въ равномѣрный Δ *КБМ*. Итакъ, Δ *КБМ* будетъ равномѣренъ данному многоугольнику *АГВБД* *).



Чер. 35.

Подобнымъ образомъ можно постепенно превратить всякій данный многоугольникъ въ равномѣрный ему треугольникъ.

Когда приходится обратить въ треугольникъ многоугольную фигуру съ большимъ количествомъ сторонъ, то, чтобы не запутать чертежа массой вспомогательныхъ линій, употребляютъ особый практическій способъ, который мы приводимъ на слѣдующемъ примѣрѣ.



Чер. 36.

Примѣръ 3-й. *Обратить многоугольникъ АБВГДЕЖЗКЛМИ въ равномѣрный ему треугольникъ* (чер. 36). Выбираютъ сначала

*) Чтобы не путаться въ чертежѣ, предлагаемъ при послѣдовательномъ превращеніи многоугольника зачеркивать буквы тѣхъ его вершинъ, которыя становятся лишними для дальнѣйшаго превращенія. такъ, напримѣръ, когда мы получимъ въ данномъ образцѣ вмѣсто пятиугольника четыреугольникъ, то буквы *В* и *Г* можно зачеркнуть, и тогда ясно видно, что остался четыреугольникъ *АКБД*.

какую-либо изъ сторонъ фигуры, продолженіе которой нигдѣ не пересѣкало бы другія части многоугольника, или, еще лучше, выбравъ одну какую-либо выдающуюся вершину многоугольника, напримѣръ, вершину *А*, проводятъ прямую *PC*, на которой и будетъ лежать основаніе искомаго треугольника. Далѣе, на противоположной сторонѣ этой прямой *PC* выбираютъ какую-нибудь точку *Ж*, которую принимаютъ за вершину искомаго треугольника. Какъ прямую *PC*, такъ и точку *Ж* выбираютъ съ такимъ расчетомъ, чтобы искомый треугольникъ по возможности приближался бы къ равностороннему, такъ какъ въ этомъ случаѣ погрѣшность при опредѣленіи, напримѣръ, площади фигуры, какъ указываетъ опытъ, будетъ наименьшая. Затѣмъ, прикладываютъ чертежный треугольникъ *фсп* къ точкамъ *Б* и *А* однимъ его краемъ *фп* и, приложивъ къ другому его краю *сп* линейку *ОП*, двигаютъ его по линейкѣ въ направленіи къ концу *П* до тѣхъ поръ, пока ребро *фп* не коснется точки *Б* многоугольника. Линіи *Бб* не прочерчиваютъ, а только намѣчаютъ точку *б*, пересѣченіе прямыхъ *Бб* и *PC* *). Обыкновенно въ точкѣ *б* и во всѣхъ остальныхъ точкахъ на прямой *PC* ставятъ булавки. Далѣе, линейку и треугольникъ подводятъ такъ, чтобы ребро *фп* проходило бы черезъ точку *Г* и точку *б* (прикасаютъ ребро треугольника къ воткнутой булавкѣ) и двигаютъ опять треугольникъ по линейкѣ до тѣхъ поръ, пока его ребро *фп* не коснется точки *В* многоугольника. Прямую *Вв* опять не прочерчиваютъ, а только булавкой намѣчаютъ точку *в*, точку пересѣченія прямыхъ *PC* и *Вв*. Затѣмъ, вновь линейку и треугольникъ подводятъ такъ, чтобы его ребро *фп* проходило бы черезъ точку *Д* и точку *в*, и, вынувъ булавки изъ точекъ *б* и *в*, двигаютъ треугольникъ по линейкѣ, пока его ребро *фп* не коснется слѣдующей точки *Г* многоугольника, и опять только намѣчаютъ точку *г*. Затѣмъ, подобнымъ же образомъ находятъ на прямой *PC* и остальныя точки: *д* и *о*. Соединивъ послѣднюю точку *о* съ точкою *Ж* многоугольника, получимъ △ *АЖо* **), который будетъ равновеликъ верхней части *АБВГДЕЖ* даннаго многоугольника. Сдѣлавъ подобное построеніе для остальной, нижней части даннаго многоугольника, мы, наконецъ, получимъ △ *аЖо*, равномѣрный данному многоугольнику *АБВГДЕЖКЛМН*.

Описанный пріемъ обращенія многоугольника въ равномѣрный треугольникъ въ сущности ничѣмъ не отличается отъ предыдущаго, вся разница заключается въ томъ, что въ первомъ случаѣ построеніе имѣется на лицо, тогда какъ во второмъ это построеніе не про-

*) Какъ линія *Бб*, такъ и линія *Вв* проведены на нашемъ чертежѣ только для объясненія равномѣрности треугольниковъ: △ *ВАБ* и △ *ВАб*.

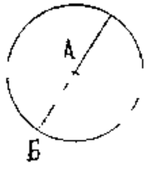
**) Линія *АЖ* на чертежѣ не проведена.

черчивается, а ограничивается только нахожденіемъ точекъ: *а*.... *б*, *в*, *г*, *д*, *о* и вспомогательной прямой *РС*. Здѣсь также, какъ и въ первомъ случаѣ, мы всегда отсѣкаемъ Δ и замѣннемъ его равномѣрнымъ. Въ справедливости сказаннаго весьма легко убѣдиться: если мы обратимъ вниманіе на чертежъ, то увидимъ, что, проведя прямую *БА*, мы отсѣкаемъ Δ *АВБ*, а найдя точку *б* и проведя прямую *Вб*, мы получимъ новый Δ *АВб*. Эти треугольники Δ *АВБ* и Δ *АВб*—равномѣрны, такъ какъ оба они имѣютъ общее основаніе *ВА* и равныя высоты, потому что вершины ихъ *Б* и *б* лежатъ на прямой *Бб* ‖ *ВА*; поэтому безъ измѣненія величины плоскости даниой фигуры возможно Δ *АВВ* замѣнить вторымъ Δ *АВб*, чѣмъ и достигается уменьшеніе числа сторонъ даннаго многоугольника. Точно также и во всѣхъ остальныхъ превращеніяхъ.

21. Превращеніе неправильныхъ многоугольниковъ въ равномѣрные треугольники весьма часто имѣетъ приложеніе при измѣреніи площадей неправильныхъ прямолинейныхъ фигуръ. Прежде чѣмъ узнать величину площади неправильной какой-либо фигуры, иногда сначала превращаютъ ее въ равновеликій треугольникъ, а затѣмъ и опредѣляютъ площадь послѣдняго. Этотъ способъ опредѣленія площадей фигуръ и проще и точнѣе, чѣмъ находить сумму площадей многихъ треугольниковъ, или другихъ какихъ-либо фигуръ, на которые разбивается площадь данной фигуры, такъ какъ въ послѣднемъ случаѣ при раздѣленіи фигуры на части, мы сдѣлаемъ всегда много погрѣшностей при измѣреніи многочисленныхъ линій. тогда какъ, измѣряя въ полученномъ равномѣрномъ треугольникѣ только 2 линіи: основаніе и высоту, мы такихъ погрѣшностей сдѣлаемъ меньше

22. Построеніе треугольника, равновеликаго данному кругу.

Данъ кругъ А (чер. 37) *и требуется построить равномѣрный ему треугольникъ.*



Чер 37



Чер. 38

Строимъ произвольный Δ *МКН* (чер. 38), у котораго основаніе *МН* = длинѣ окружности даннаго круга, а высота *ДК* = радіусу *АБ* даннаго круга *А*. Этотъ треугольникъ и будетъ

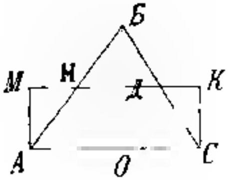
искомымъ, такъ какъ его площадь будетъ $=\frac{MH\times ДК}{2}$, т. е. половинѣ произведенія его основанія, или окружности даннаго круга, на его высоту, или на радіусъ даннаго круга.

На основаніи этого построенія можно вывести, что ***всякій кругъ равновеликъ треугольнику, у котораго основаніе равно окружности даннаго круга и высота его радіусу.***

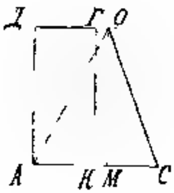
Замѣтимъ, что построеніе треугольника, равномѣрнаго данному кругу, не можетъ быть сдѣлано вполнѣ точно, такъ какъ въ это построеніе входитъ длина окружности, отношеніе которой къ своему діаметру, какъ намъ уже извѣстно, не можетъ быть выражено вполнѣ точно никакимъ числомъ.

23. Построеніе прямоугольника, равномѣрнаго данному треугольнику.

Примѣръ 1. ***Данъ*** Δ $АБС$ (чер. 39) ***и требуется начертить равномѣрный ему прямоугольникъ.***



Чер. 39.



Чер 40

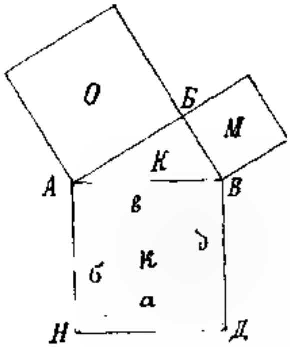
Дѣлимъ прямую $АБ$ пополамъ и черезъ ея средину, черезъ точку $Н$, проводимъ прямую $МК \parallel АС$; далѣе, изъ точекъ $А$ и $С$ возставляемъ перпендикуляры $АМ$ и $СК$ къ прямой $АС$ и продолжаемъ ихъ до встрѣчи съ параллельной $МК$. Полученный прямоугольникъ $АМКС$ и будетъ искомымъ, потому что площ. $\Delta\, АБС = АС \times \frac{ОБ}{2}$, а площадь прямоугольника $АМКС = АС \times АМ$, но по построенію $АМ = \frac{ОБ}{2}$ *), значитъ, площадь $АМКС =$ площади $\Delta\, АБС$.

Примѣръ 2. ***Данъ*** Δ $АОС$ (чер. 40) ***и требуется начертить равномѣрный ему прямоугольникъ.*** Сначала дѣлимъ основаніе $АС$ пополамъ въ точкѣ $К$ и возставляемъ перпендикуляры: $АД \perp АС$ и $КГ \perp АС$; далѣе, проводимъ черезъ вершину $О$ даннаго треугольн. прямую $ДО \parallel АС$. Полученный прямоугольникъ $АДГК$ и будетъ искомымъ, потому что площадь $\Delta\, АОС = \frac{АС \times ОМ}{2}$, или $\frac{АС}{2} \times ОМ$, а площадь прямоуг. $АДГК = АК \times АД$; но по построенію $АК = \frac{АС}{2}$, а высота $АД = МО$, значитъ, площадь $АДГК =$ площади $\Delta\, АОС$.

24. Свойство квадратовъ, построенныхъ на сторонахъ прямоугольнаго треугольника.

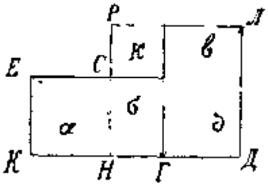
*) Въ этомъ можемъ убѣдиться измѣреніемъ при помощи циркуля

Если мы возьмемъ прямоугольный Δ *АБВ* (чер. 41) и построимъ на его сторонахъ квадраты: $\square$ *АВДН*, $\square$ *М* и $\square$ *О*, то можно убѣдиться, что ***квадратъ АВДН, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго Δ АБВ, равновеликъ суммѣ квадратовъ: $\square$ М и $\square$ О, построенныхъ на его катетахъ***, т. е. площадь квадрата *АВДН* = площ. квадрата ***М*** + площадь квад. ***О*** *).



Чер. 41.

Для этого мы вырѣжемъ изъ бумаги 4 прямоугольныхъ треугольника: Δ *а*, Δ *б*, Δ *в*, Δ *д*, изъ которыхъ каждый равенъ данному прямоугольнику Δ *АБВ* и положимъ эти треугольники на квадратъ *АБДН* такъ, какъ показано на чертежѣ 41. Мы видимъ, что для заполненія площади квадрата *АВДН* остается прибавить въ середину площадь квадрата *к*, у котораго, какъ видно изъ построенія, сторона равна разности катетовъ даннаго прямоугольника Δ *АБВ*; значитъ, 4 данныхъ прямоугольныхъ Δ ***АБВ*** и квадратъ *к*, вмѣстѣ взятые, составляютъ полную площадь квадрата *АБДН*, построеннаго на гипотенузѣ даннаго прямоугольника Δ *АБВ*. Если теперь мы сложимъ эти 4 треугольника и квадратъ *к* такъ,



Чер. 42.

какъ показано на чертежѣ 42, то мы получимъ фигуру, площадь которой можно составить изъ двухъ квадратовъ: квадрата *НРЛД* и квадрата ***НСЕК***. Измѣреніемъ сторонъ мы можемъ убѣдиться въ томъ, что первый изъ этихъ квадратовъ, квадратъ *НРЛД* = квадрату *О*, построенному на большомъ катетѣ даннаго прямоугольнаго Δ *АБВ* (чер. 41), а второй квадратъ *НСЕК* = квадрату ***М***, построенному на меньшемъ катетѣ даннаго прям. Δ *АБВ*. Итакъ, площадь квадрата *АВДН* (чер. 41) можно составить изъ суммы площадей квадратовъ *М* и *О*, т. е. площадь квадрата *АВДН* = площади квадрата ***О*** + площад. квад. ***М***.

Зная это свойство прямоугольнаго треугольника, можно рѣшать многія практическія задачи. Вотъ нѣсколько изъ нихъ.

Примѣръ 1. ***Одинъ катетъ прямоугольнаго Δ = 3 дюйм., а другой = 4 д. Найти длину гипотенузы.***

*) Это свойство прямоугольнаго треугольника открыто греческимъ ученымъ Пиѳагоромъ, который жилъ за 500 лѣтъ до Рожд. Христова.

Рѣшеніе. **Квадратъ, построенный на одномъ катетѣ даннаго прямоугольника $\Delta = 3 \times 3 = 9$ квадрат. дюйм.: квадратъ, построенный на другомъ его катетѣ $= 4 \times 4 = 16$ квадрат. дюйм.; значитъ, квадратъ, построенный на гипотенузѣ даннаго прямоугольнаго $\Delta = 9 + 16 = 25$ квадрат. дюйм., а отсюда гипотенуза его $= \sqrt{25} = 5$ д.**

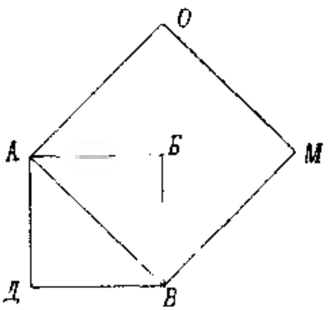
Примѣръ 2-й. ***Гипотенуза прямоугольнаго $\Delta = 12$ вершк., а одинъ катетъ его — 6 вершк. Чему равенъ другой катетъ?***

Рѣшеніе. Квадратъ, построенный на гипотенузѣ этого треугольника $= 12 \times 12 = 144$ квадрат. верш.; квадратъ, построенный на катетѣ $= 6 \times 6 = 36$ квадр. верш.; значитъ, квадратъ, построенный на неизвѣстномъ катетѣ $= 144 - 36 = 108$ квадрат. верш., а неизвѣстный катетъ $= \sqrt{108} =$ около $10^2/_{10}$ вершк.

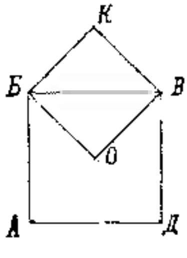
Примѣръ 3-й. ***Начертить квадратъ въ 2 раза болѣе даннаго квадрата АБВД*** (чер. 43).

Рѣшеніе. Проведя въ данномъ квадратѣ діагональ *АВ*, строимъ на ней квадратъ *АВМО*, который и будетъ искомымъ, такъ какъ онъ будетъ = суммѣ двухъ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго Δ *АБВ*; а каждый изъ этихъ квадратовъ = данному квадрату *АБВД*.

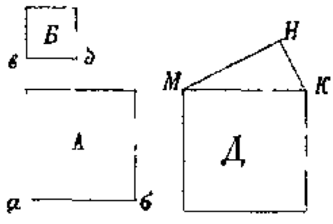
Примѣръ 4-й. ***Построить квадратъ вдвое менѣе даннаго квадрата АБВД*** (чер. 44).



Чер. 43.



Чер. 44



Чер. 45.

Рѣшеніе. Проведя двѣ діагонали *АВ* и *БД*, строимъ на половинѣ одной изъ нихъ, на линіи *ОВ* квадратъ *ОВКБ*, который и будетъ искомымъ, такъ какъ онъ построенъ на катетѣ *ОВ* равнобедреннаго прямоугольнаго Δ *ОВВ*, у котораго гипотенуза *БВ* = сторонѣ даннаго квадрата *АВВД*.

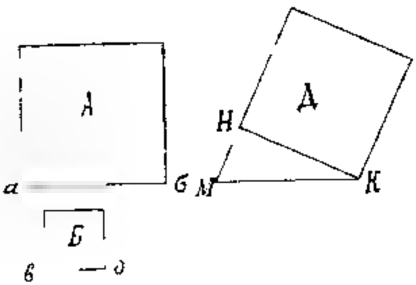
Примѣръ 5-й. ***Построить квадратъ равномѣрный суммѣ 2-хъ данныхъ квадратовъ: квадрату А и квадрату В*** (чер. 45).

Рѣшеніе Строимъ сначала прям. △ *МНК*, у котораго катеты *МН* и *НК* были бы равны сторонамъ данныхъ квадратовъ, т. е. *МН* = *аб* и *НК* = *вд*. Квадратъ *Д*, построенный на гипотенузѣ *МК* этого прямоугольника △ *МНК*, и будетъ искомымъ.

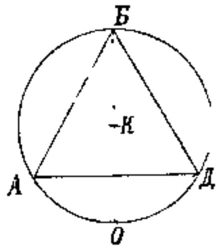
Примѣчаніе. Для построенія квадрата, равномѣрнаго суммѣ нѣсколькихъ квадратовъ, сначала находимъ сумму двухъ, потомъ къ ней прибавляемъ третій и т. д.

Примѣръ 6-й. ***Построить квадратъ, равномѣрный разности 2-хъ данныхъ квадратовъ: квадрату А и квадрату Б*** (чер. 46).

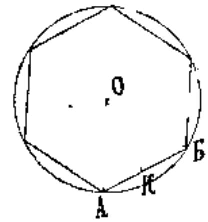
Рѣшеніе. Строимъ сначала прямоугольный △ *МНК*, у котораго гипотенуза *МК* = *аб* сторонѣ большаго даннаго квадрата *А*, а катетъ *МН* = *вд* сторонѣ меньшаго даннаго квадрата *Б*. Квадратъ *Д*, построенный на второмъ катетѣ *НК* этого прямоугольнаго △ *МНК*, и будетъ искомымъ.



Чер. 46.



Чер. 47



Чер. 48.

Примѣръ 7-й ***Найти длину стороны вписаннаго равносторонняго △ АВД, если радіусъ круга извѣстенъ, напримѣръ, 6 сант.*** (чер. 47).

Рѣшеніе. Сначала обратимъ вниманіе на то, что $\smile ДБ = \frac{360}{3} = 120^\circ$. Если проведемъ теперь діаметръ *БО* и соединимъ точки *О* и *Д* прямой *ОД*, то получимъ прямоугольный △ *ОДБ*, такъ какъ ∠ *БДО* = ∠ *d*, какъ вписанный и опирающійся на концы діаметра. Далѣе, мы видимъ, что $\smile ДО = \smile БДО - \smile БД = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; слѣдов., прямая *ОД* есть хорда дуги въ 60°, т. е. *ОД* = сторонѣ правильнаго вписаннаго шестиугольника, а слѣдовательно и равна радіусу *ОК* = 6 сант. Итакъ, △ *ОДВ* имѣетъ гипотенузу *ОВ* = 12 сантиметрамъ, и катетъ *ОД* = 6 сантим.; значитъ, $БД^2 = БО^2 - ДО^2 = 12^2 - 6^2 = 144 - 36 = 108$, слѣдов., $БД = \sqrt{108} = 10^6/_{10}$ сант. (приблизительно).

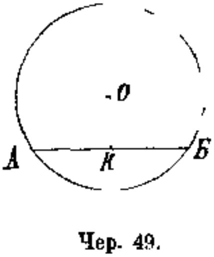
Примѣръ 8-й. ***Вычислить площадь правильнаго шестиугольника, котораго сторона извѣстна, напримѣръ, она = 8 дюйм.*** (чер. 48).

Площадь даннаго шестиугольника $= \frac{6\,АБ \times ОК}{2} = \frac{6 \times 8 \times ОК}{2} =$ $= \frac{48 \times ОК}{2} = 24 \times ОК$. Чтобы найти $ОК$, то сначала построимъ прямоугольный $\Delta\ ОБК$ и замѣтимъ, что радiусъ круга, описаннаго около даннаго правильнаго шестиугольника, равняется сторонѣ шестиугольника, т. е. $ОБ = АБ = 8$ дюйм., а прямая $КБ = \frac{АБ}{2} = \frac{8}{2} = 4$ дюйм. Итакъ, у прямоугольнаго $\Delta\ КОБ$ — гипотенуза $ОБ = 8$, а катетъ $КБ = 4$; слѣдоват., $ОК^2 = ОБ^2 - КБ^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$, а $ОК = \sqrt{48}$ = около 7; значитъ, площадь даннаго многоугольника $=$ $= 24 \times 7 = 168$ квадрати. дюйм. (приблизительно).

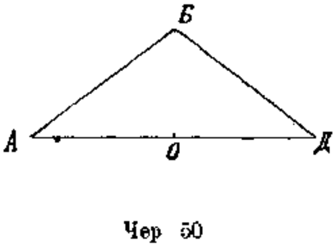
Примѣръ 9. ***Въ кругъ, радiусъ котораго = 10 вершк., проведена хорда АБ на разстоянiе ОК = 8 вершковъ отъ центра. Найти длину хорды*** (чер. 49).

Рѣшенiе *). Изъ $\Delta\ ОКБ$ слѣдуетъ: $КБ^2 = ОБ^2 - ОК^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$; слѣдовательно, $КБ = \sqrt{36} = 6$, а потому $АБ = 6 \times 2 = 12$ вершк.

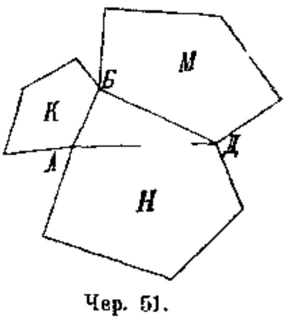
Примѣръ 10. ***Вычислить площадь равнобедреннаго $\Delta\ АБД$, если его основанiе $АД = 8$ дюйм., а боковыя стороны $БД = АБ =$ $= 5$ дюйм.*** (Чер. 50).



Чер. 49.



Чер 50



Чер. 51.

Рѣшенiе. Замѣтимъ сначала, что требуется узнать длину высоты $ОБ$, которая дѣлитъ основанiе $АД$ даннаго равноб. $\Delta\ АБД$, пополамъ, и что $ОД = \frac{АД}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Изъ прямоугольнаго $\Delta\ ОБД$ имѣемъ: $ОБ^2 = БД^2 - ОД^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$; значитъ, $ОБ = \sqrt{9} = 3$. Слѣдовательно, площадь $\Delta\ АБД = \frac{АД \times ОБ}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$ кв. дюйм.

25. Построенiе многоугольника, равновеликаго суммѣ нѣскольких подобных многоугольниковъ, и равновеликаго разности двухъ такихъ же многоугольниковъ.

Если мы возьмемъ (чер. 51) прямоугольный $\Delta\ АБД$ и по—

*) Линiя $ОБ$ на чертежѣ не проведена.

строимъ на его сторонахъ подобные многоугольники: мног. *К*, мн. *М* и мн. *Н*, то, вычисливъ ихъ площади, мы увидимъ, что площадь многоугольника *Н* = площади мног. *М* + пл. мног. *К*.

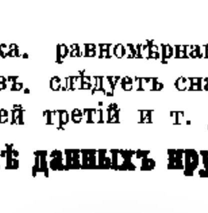
Дѣлая подобныя построенія и вычисляя каждый разъ площади подобныхъ многоугольниковъ, построенныхъ на сторонахъ другихъ прямоугольныхъ треугольниковъ, мы всегда будемъ имѣть тоже самое. ***Итакъ, площадь подобнаго многоугольника, построеннаго на гипотенузѣ прямоугольнаго треугольника, всегда равновелика суммѣ площадей подобныхъ ему многоугольниковъ, построенныхъ на катетахъ этого же треугольника.***

Зная это свойство прямоугольнаго Δ, можно всегда и пользоваться имъ для построенія многоугольниковъ, равномѣрныхъ суммѣ или разности двухъ подобныхъ ему многоугольниковъ. Если требуется, напримѣръ, построить многоугольникъ, равномѣрный суммѣ данныхъ и подобныхъ ему многоугольниковъ, то сначала строимъ прямоугольный Δ, у котораго катетами будутъ какія-либо двѣ сходственныя стороны данныхъ многоугольниковъ; и многоугольникъ, построенный по гипотенузѣ этого прямоугольнаго треугольника и подобный даннымъ многоугольникамъ, и будетъ, на основаніи вышеизложеннаго, равномѣренъ суммѣ данныхъ многоугольниковъ. Если же требуется построить многоугольникъ, равномѣрный разности двухъ данныхъ и подобныхъ ему многоугольниковъ, то сначала строимъ прямоугольный Δ, у котораго гипотенуза и одинъ изъ катетовъ были бы порознь равны какимъ-либо сходственнымъ сторонамъ двухъ данныхъ многоугольниковъ, а подобный многоугольникъ, построенный на 2-мъ катетѣ этого Δ, будетъ равномѣренъ разности данныхъ многоугольниковъ.

Примѣчаніе. Для построенія многоугольника, равномѣрнаго суммѣ нѣсколькихъ подобныхъ ему многоугольниковъ, слѣдуетъ сначала найти сумму двухъ, затѣмъ прибавить къ ней третій и т. д.

26. Построеніе круга, равновеликаго суммѣ данныхъ круговъ или разности двухъ круговъ.

Если мы возьмемъ (чер. 52) прямоугольный Δ *АВД* и построимъ на его сторонахъ, какъ на діаметрахъ, круги: кр. *К*, кр. *М* и кр. *Н*, то, вычисливъ ихъ площади, мы найдемъ, что площадь круга *К*=площади круга *М*+площадь круга *Н*. Дѣлая подобныя построенія и вычисляя всякій разъ площади круговъ, построенныхъ на сторонахъ другихъ прямоугольныхъ треугольниковъ, мы всегда будемъ имѣть то же самое. ***Итакъ,***



Чер 52.

площадь круга, построеннаго на гипотенузѣ прямоугольн. треугольника, равновелика суммѣ площадей круговъ, построенныхъ на его катетахъ.

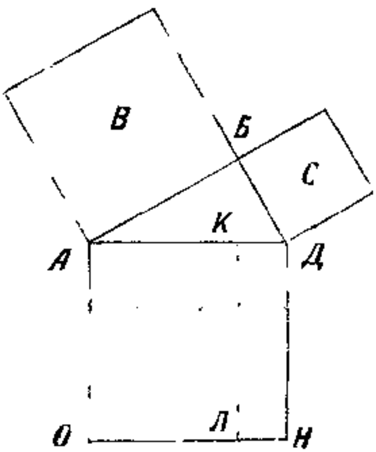
На основаніи этого, если, напримѣръ, требуется построить кругъ, равномѣрный суммѣ данныхъ круговъ, то сначала строимъ прямоугольный Δ, у котораго катетами будутъ діаметры данныхъ круговъ; тогда кругъ, построенный на гипотенузѣ этого Δ, и будетъ искомымъ. Если же требуется построить кругъ, равновеликій разности 2-хъ данныхъ круговъ, то сначала строимъ прямоугольный Δ, у котораго гипотенуза и катетъ были бы равны діаметрамъ данныхъ круговъ, и кругъ, построенный на другомъ катетѣ этого Δ, и будетъ искомымъ.

Примѣчаніе. Для построенія круга, равномѣрнаго суммѣ нѣсколькихъ круговъ, слѣдуетъ сначала найти сумму двухъ изъ нихъ, потомъ къ ней прибавить третій и т. д.

27. Построеніе квадратуръ.

Построить квадратуру какой-нибудь фигуры, это значитъ, построить квадратъ, равновеликій данной фигурѣ.

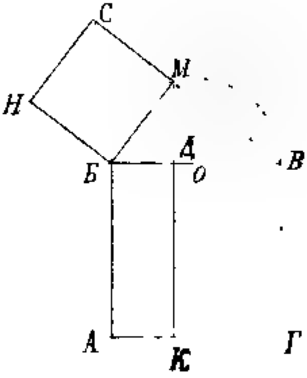
Примѣръ 1-й. *Построить квадратъ, равномѣрный данному прямоугльнику* (черт. 53).



Чер 53.

Если мы на сторонахъ прямоугольнаго Δ. *АБД* построимъ квадраты: □ *АДНО*, □ *В* и □ *С* и опустимъ изъ вершины *Б* прямаго угла ⊥ *БК* на гипотенузу и продолжимъ его до линіи *ОН*, то квадратъ *АДНО*, построенный на гипотенузѣ прямоугольнаго Δ, раздѣлится на два прямоугольника: прямоуг *АКЛО* и прямоугольникъ *ЛКДН*. Измѣряя площади этихъ прямоугольниковъ и площади квадратовъ *С* и *Б*, построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго Δ *АБД*, мы найдемъ, что площадь прямоугольника *АКЛО* = площади квадр. *В*, а площадь прямоугольника *ЛКДН* = площ. квадрата *С*. Дѣлая подобныя построенія на сторонѣ другого, третьяго и т. д. прямоугольнаго треугольника, — мы всегда будемъ получать на гипотенузѣ два прямоугольника, равномѣрные соотвѣтствующимъ

квадратамъ, построеннымъ на катетахъ. На этомъ основанiи дѣлается и построенiе квадрата, равномѣрнаго данному прямоугольнику, такимъ образомъ: пусть данъ прямоугольникъ *АБДК* (черт. 54), и требуется построить равномѣрный ему квадратъ. Сначала продолжаемъ меньшую сторону *БД* даннаго прямоугольника на такое разстоянiе, чтобы *БВ* = *АБ* большей сторонѣ прямоугольника; затѣмъ, эту прямую *БВ* дѣлимъ пополамъ и изъ точки *О*, какъ изъ центра, проводимъ полуокружность *БМВ*; далѣе, продолжаемъ сторону *КД*, до пересѣченiя ея съ полуокружностью въ точкѣ *М*. Соединивъ точку *М* съ *Б* прямою *МБ*, построимъ на ней квадратъ *БНСМ*, который и будетъ искомымъ. Проведя прямую *МВ*, мы получимъ прямоугольный Δ *ВМБ*, такъ какъ $\angle$ *БМВ* = *d*, какъ вписанный уголъ, опирающiйся на концы дiаметра *ББ*, и потому, на основанiи вышеизложеннаго, площадь полученнаго квадрата *ВНСМ*, построеннаго на катетѣ *БМ* = площади даннаго прямоугольника *АВДК*, составляющаго, какъ видно изъ чертежа, часть квадрата, построеннаго на гипотенузѣ этого-же прямоугольнаго треугольника.

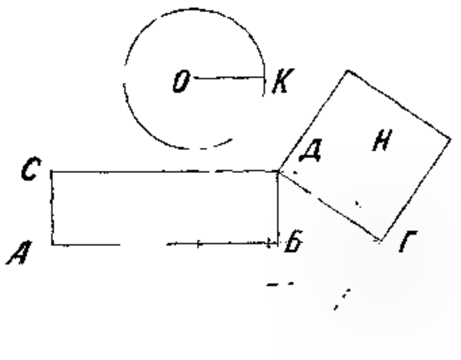


Чер. 54

Примѣръ 2. ***Построить квадратъ, равновеликiй данному многоугольнику.*** Для этого сначала данный многоугольникъ извѣстнымъ уже намъ построенiемъ замѣняемъ равномѣрнымъ ему треугольникомъ; затѣмъ, этотъ полученный треугольникъ замѣняемъ равномѣрнымъ прямоугольникомъ, и, наконецъ, этотъ послѣднiй замѣняемъ квадратомъ.

Примѣръ 3. ***Построить квадратъ, равномѣрный данному кругу.*** Сначала строимъ прямоугольникъ, у котораго основанiе = длинѣ окружности даннаго круга, т. е. $= 2\pi p$ или $3\frac{1}{7}$ дiаметра даннаго круга, а высота этого прямоугольника $= \frac{1}{2}p$ т. е. половинѣ радiуса даннаго круга. Площадь полученнаго прямоугольника будетъ = площади даннаго круга, такъ какъ площадь прямоугольника = основанiю, умноженному на высоту; и площадь даннаго круга равна $2\pi p \times \frac{1}{2}p$, т. е. равна окружности (или, что то же, основанiю построеннаго прямоугольника), умноженной на половину радiуса (или, что то же, на высоту построеннаго прямоугольника). Затѣмъ, извѣстнымъ уже намъ построенiемъ (§ 27) находимъ квадратъ, равномѣрный полученному прямоугольнику. Этотъ квадратъ и будетъ равновеликъ данному кругу.

Такъ какъ площадь круга выражается еще иначе, а именно $\Pi \times p^2$ (§ 11), что значитъ $\Pi \times p \times p$, то для превращенія даннаго круга O (чер. 55) въ квадратъ, можно сначала строить прямоугольникъ $АСДВ$, у котораго основаніе $АБ = \Pi \times p$ или $3^1/_7$ радіуса даннаго круга, а высота $АС$ этого прямоугольника $ОК = p$, т. е. радіусу даннаго круга, и затѣмъ, строимъ квадратъ H, равновеликій полученному прямоугольнику $АСДБ$, а слѣдовательно равновеликій и данному кругу O

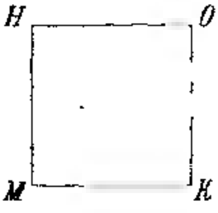


Чер. 55

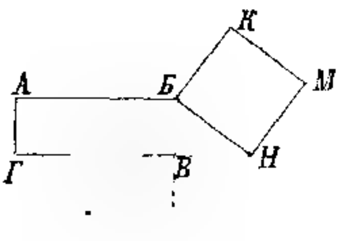
Замѣтимъ, что построеніе квадрата, равномѣрнаго данному кругу, не можетъ быть сдѣлано вполнѣ точно, такъ какъ въ это построеніе входитъ длина окружности, отношеніе которой къ своему діаметру, какъ намъ уже извѣстно, не можетъ быть выражено никакимъ точнымъ числомъ.

28. Увеличеніе и уменьшеніе фигуръ. Увеличить или уменьшить данную фигуру въ нѣсколько разъ, это значитъ нужно построить новую фигуру, подобную даной, и при томъ такъ, чтобы ея площадь была бы въ данное число разъ больше или меньше площади данной фигуры. Увеличеніе и уменьшеніе фигуръ производится такъ:

Примѣръ 1-й. *Уменьшить данный квадратъ $МНОК$* (чер. 56) *въ 3 раза.* Строимъ сначала прямоугольникъ $АБВГ$ (чер. 57), у котораго одна сторона $АБ$ = сторонѣ $МН$ даннаго квадрата, а другая его сторона $БВ$ въ 3 раза меньше ея. Площадь полученнаго прямоугольника будетъ, конечно, въ 3 раза меньше площади даннаго квадрата. Теперь, извѣстнымъ уже намъ построеніемъ, находимъ квадратъ, равновеликій этому полученному прямоугольнику, такъ, какъ показано на чертежѣ. Этотъ построенный квадратъ $БКМН$ и будетъ въ 3 раза меньше даннаго.



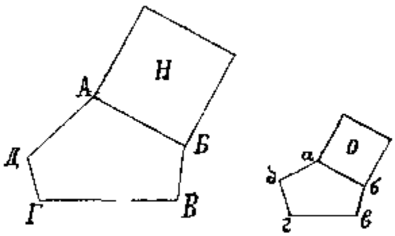
Чер. 56.



Чер. 57.

Если бы нужно было увѣличить данный квадратъ въ 3, 5, 7... и т. д. разъ, то также сначала строимъ прямоугольникъ, у котораго одна сторона была бы равна сторонѣ даннаго квадрата, а другая сторона этого прямоугольника была бы въ 3, 5, 7... и т. д. разъ болѣе стороны даннаго квадрата. Остальное построеніе такое же, какъ и въ вышеизложенномъ примѣрѣ.

Примѣръ 2. *Данный многоугольникъ абвгд увеличить въ 3 раза* (чер. 58). Строимъ сначала на произвольной сторонѣ *аб* даннаго многоугольника *абвгд* квадратъ *О*; затѣмъ, утроимъ этотъ квадратъ способомъ, только что изложеннымъ въ 1-мъ примѣрѣ, и пусть этотъ новый квадратъ будетъ *Н*, а его сторона *АБ*.



Чер. 58.

Далѣе, на сторонѣ *АБ*, строимъ многоугольникъ *АБВГД*, подобный данному многоугольнику *абвгд*. Этотъ полученный большой многоугольникъ *АВВГД* и будетъ искомымъ. Намъ уже извѣстно что площадь одного многоугольника всегда болѣе площади другого подобнаго ему многоугольника, во столько разъ, во сколько квадратъ одной сходственной стороны одного (или, иначе сказать, квадратъ построенный на сходственной сторонѣ) болѣе квадрата сходственной стороны другого. Если въ данномъ примѣрѣ по построенію квадратъ *Н* болѣе квадрата *О* въ 3 раза, то, значитъ, и полученный многоугольникъ *АБВГД* также въ 3 раза болѣе даннаго, и подобнаго ему многоугольника *абвгд*.

Примѣръ 3. *Данный кругъ увеличить въ 3 раза.* Сначала строимъ квадратъ, у котораго сторона равнялась бы радіусу даннаго круга; затѣмъ, увеличиваемъ полученный квадратъ въ 3 раза. Сторона полученнаго квадрата и будетъ радіусомъ искомаго круга, такъ какъ намъ уже извѣстно, что площадь одного круга всегда во столько разъ болѣе или менѣе площади другаго круга, во сколько квадратъ радіуса (или, иначе сказать, квадратъ построенный на радіусѣ) одного круга болѣе или менѣе квадрата радіуса (квадрата построеннаго на радіусѣ) другого круга. Въ данномъ случаѣ квадратъ, построенный на радіусѣ полученнаго круга въ 3 раза болѣе квадрата построеннаго на радіусѣ даннаго круга, значитъ, и площадь полученнаго круга болѣе площади даннаго круга тоже въ 3 раза.

Примѣчаніе. Если нужно увеличить или уменьшить данный многоугольникъ или кругъ въ 4, 9, 16, 25... и т. д. разъ, т. е. въ 2^2, 3^2, 4^2, 5^2... и т. д., то можно вышеуказанное построеніе, на осно-

ваніи отношеній площадей подобныхъ фигуръ (§ 8, 12 и 15), нѣсколько упростить, а именно: можно прямо строить фигуры, подобныя даннымъ, у которыхъ только сходственныя стороны были бы въ 2, 3, 4, 5... и т. д. разъ болѣе или менѣе сходственныхъ сторонъ данныхъ фигуръ.

Задачи и упражненія.

1) Построить Δ, равновеликій данному, у котораго основаніе было бы вдвое болѣе основанія даннаго Δ.

2) Построить Δ, равновеликій данному, у котораго высота была бы въ 3 раза менѣе высоты даннаго Δ.

3) Превратить данный семиугольникъ въ равновеликій Δ.

4) Начертить кругъ равномѣрный суммѣ 4 данныхъ круговъ.

5) Дана длина окружности 386 д. Найти длину стороны вписаннаго въ нее квадрата.

6) Длина хорды равняется 54 д. Найти радіусъ ея дуги.

7) Площадь одного изъ подобныхъ треугольниковъ равна 186 кв. д. Найти величину площади другого большаго треугольника, если отношеніе сходственныхъ сторонъ ихъ равна 3 : 8.

8) Данъ квадратъ. Увеличить его въ 5 разъ.

9) Данъ правильный шестиугольникъ. Превратить его въ равновеликій квадратъ.

10) Данъ неправильный пятиугольникъ. Построить равновеликій ему квадратъ.

11) Данный Δ увеличить въ 3 раза.

12) Данный многоугольникъ увеличить въ 5 разъ.

13) Данъ Δ ABC, у котораго основаніе = 12 ф., высота—5 ф., и одна изъ сторонъ 7 ф. Начертить по масштабу въ $^1/_{24}$ величины: а) равномѣрный равнобедренный Δ; б) равномѣрный Δ, у котораго основаніе равнялось бы 10 фут; д) равномѣрный Δ, у котораго высота равнялась бы 9 фут.; е) равномѣрный квадратъ.

14) Данъ Δ ABC. Начертить отъ руки другой Δ, который былъ бы болѣе даннаго въ 2, 3, 4, 5... разъ и провѣрить построеніе инструментами.

15) Данъ прямоугольникъ. Начертить отъ руки другой прямоугольникъ, который былъ бы въ 2, 3, 4, 5... разъ менѣе даннаго и провѣрить построеніе.

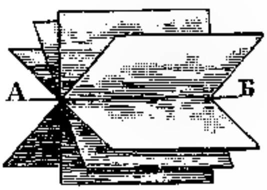
16) Данъ кругъ, площадь котораго = 2464 кв. футъ. Найти чему будетъ равенъ радіусъ круга, котораго площадь въ 4 раза менѣе площади даннаго круга.

Отдѣлъ III.

Плоскости, двугранные и многогранные углы.

29. Плоскости. Плоскостью называется, какъ намъ уже извѣстно, всякая прямая поверхность, т. е. такая, съ которой прямая линія сливается по всѣмъ направленіямъ. Плоскости встрѣчаются всюду, и весьма часто приходится опредѣлять ихъ положеніе. Познакомимся же теперь съ тѣмъ, когда положеніе плоскости будетъ вполнѣ опредѣленнымъ.

Черезъ одну какую либо линію *АВ*, какъ видно изъ чертежа 59, можно провести сколько угодно плоскостей. Также много плоскостей можно провести чрезъ 2 какія либо точки *А* и *Б* (чер. 60).

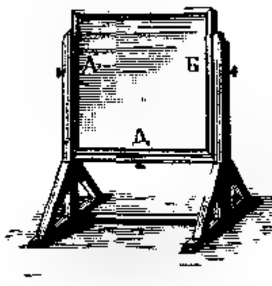


Чер. 59.

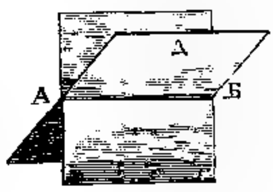


Чер. 60

Одну только плоскость можно провести: во 1-хъ), *черезъ 3 какія либо точки, не лежащія на одной прямой;* напримѣръ, классная доска можетъ вращаться (чертежъ 61) около точекъ *А* и *Б*, которыя укрѣплены; но она станетъ неподвижно, если ее укрѣпить еще въ точкѣ *Д*: во 2-хъ), *черезъ прямую и точку, не лежащую на продолженіи этой данной прямой* (чер. 62), какъ напримѣръ, чрезъ точку *Д* и линію *АБ*;



Чер. 61.



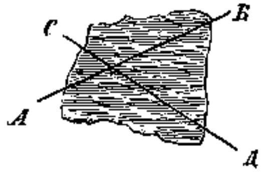
Чер 62.

въ 3-хъ), ***черезъ двѣ параллельныя линіи***, какъ напримѣръ, чрезъ линію *АБ* и *ДЕ* (чер. 63), и наконецъ, въ 4–хъ, ***чрезъ двѣ пересѣкающіяся линіи***, какъ напримѣръ, чрезъ линіи *АВ* и *СД* (чер. 64).

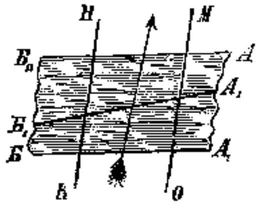
Примѣчаніе. Если двѣ плоскости будутъ имѣть три общія точки, то онѣ сольются.



Чер. 63.

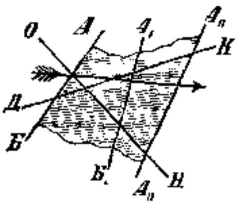


Чер. 64.

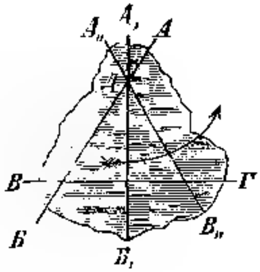


Чер 65.

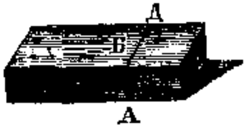
30. Образаваніе плоскости. На основаніи вышеизложеннаго, образованіе плоскости можно себѣ представить, во 1-хъ), движеніемъ прямой *АБ* по 2 параллельнымъ прямымъ *ОМ* и *НК* *) (чер. 65); во 2-хъ), движеніемъ прямой *АБ* по двумъ пересѣкающимся прямымъ *ДК* и *ОН* (чер. 66), или же, наконецъ, въ 3-хъ), движеніемъ прямой *АБ* по прямой линіи *ВГ*, но такъ, чтобы линія *АБ* вращалась бы около одной какой либо точки *Д* (чер. 67).



Чер. 66



Чер 67.



Чер. 68.

Всѣми этими способами образованія плоскости пользуются весьма часто при различныхъ работахъ, что видно изъ слѣдующихъ примѣровъ:

Примѣръ 1-й. Чтобы отпилить кусокъ дерева правильно, т. е. въ плоскость, и въ извѣстномъ направленіи, то проводятъ (чер. 68) сначала по брусу въ данномъ направленіи двѣ линіи *АВ* и *БД* и начинаютъ пилить, наблюдая, чтобы пила двигалась одновременно

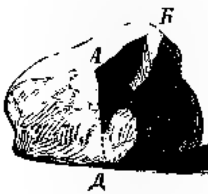
---

*) Движеніе прямой указано на чертежѣ стрѣлкой и положеніями прямой: *АБ*, $А_1Б_1$ и $А_2Б_2$.

по намѣченнымъ линіямъ. Въ разрѣзѣ получается плоскость, такъ какъ прямая линія зубьевъ пилы движется по двумъ пересѣкающимся прямымъ.

Примѣръ 2-й. Каменьщики при обтескѣ камней (чер. 69) въ плоскость сначала проводятъ мѣломъ линіи *АБ* и *АД* и, затѣмъ, уже выдалбливаютъ рѣзцами все, что лежитъ внѣ плоскости, проходящей чрезъ намѣченныя линіи. Самое же направленіе плоскости они намѣчаютъ прикладываніемъ ребра линейки къ начерченнымъ линіямъ.

Примѣръ 3-й. На кирпичныхъ заводахъ при формовкѣ кирпичей для полученія верхней плоскости лишній матеріалъ удаляютъ линейкой, которую ведутъ по двумъ параллельнымъ ребрамъ ящика (чер. 70).



Чер. 69.



Чер. 70.

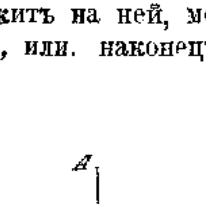


Чер. 71.

Примѣръ 4-й. При измѣреніи сыпучихъ мѣръ излишекъ вещества сбрасывается также линейкой, которую проводятъ, плотно прижимая къ краямъ мѣры (чер. 71).

31. Положеніе прямой относительно плоскости. Прямая линія относительно плоскости, если она вся не лежитъ на ней, можетъ быть, или *наклонна*, или *перпендикулярна*, или, наконецъ, *параллельна*.

Перпендикулярной линіей къ плоскости называется только та линія, которая перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ на плоскости чрезъ ея основаніе, т. е. черезъ точку пересѣченія ея съ плоскостью, какъ напримѣръ (чер. 72) линія *АБ* перпендикулярна и къ линіи *КБ* и къ линіи *ОБ*, лежащимъ на плоскости и проходящимъ черезъ основаніе *Б*. Только такая линія образуетъ прямой уголъ со всякой прямой, проведенной на этой плоскости чрезъ ея основаніе.



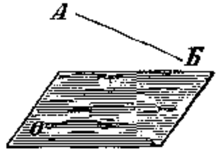
Чер. 72.

Всякая линія АВ, которая при продолженіи (чер. 73) ***никогда не встрѣчается съ плоскостью О, будетъ параллельна плоскости.***

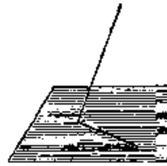
Всякая линія АВ, неперпендикулярная къ плоскости О и непараллельная, называется наклонной (чер. 74).



Чер. 73



Чер. 74.

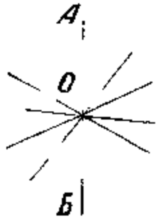


Чер. 75

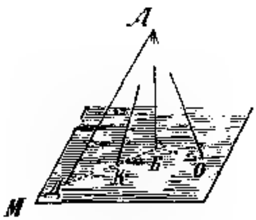
Примѣчаніе. 1) Наклонная линія можетъ быть перпендикулярна къ одной прямой, лежащей на плоскости и проходящей черезъ ея основаніе (чер. 75).

2) Чрезъ точку *О*, взятую на прямой *АБ*, въ пространствѣ (чер. 76), можетъ быть возставлено, какъ видно изъ чертежа, нѣсколько перпендикуляровъ.

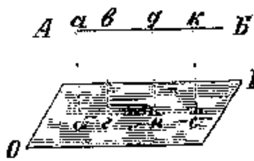
Если возьмемъ какую нибудь плоскость *М* и внѣ ея точку *А*, то, проведя къ плоскости изъ одной точки перпендикуляръ *АБ* и нѣсколько наклонныхъ (чер. 77), то измѣреніемъ можемъ убѣдиться: во 1-хъ, что ***перпендикуляръ будетъ короче всякой наклонной***, во 2-хъ, ***равныя наклонныя, какъ напримѣръ, АО и АК будутъ равно удалены отъ основанія перпендикуляра***, и въ 3-хъ, ***та наклонная будетъ больше, которая дальше удалена отъ основанія перпендикуляра***, *АД* > *АО*.



Чер 76.



Чер 77.



Чер. 78.

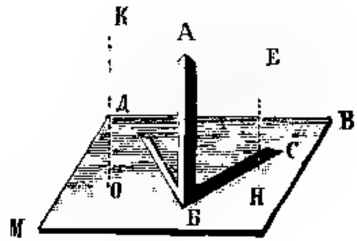
Примѣчаніе. 1) Разстояніемъ точки отъ плоскости считается всегда перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на плоскость.

2) Плоскость *М* относительно прямой *АБ* (чер. 77) называется ***перпендикулярной плоскостью.***

3, Если какая-либо линія *АБ* будетъ параллельна плоскости *ОМ* (чер. 78), то ея разстоянія отъ плоскости будутъ равны между собою. т. е. равны перпендикуляры: *аб* = *вг* = *дн*... и т. п.

Различныя положенія прямыхъ относительно плоскостей встрѣчаются всюду; такъ, напримѣръ, боковыя ребра комнатъ перпендикулярны къ полу и потолку; ребра потолка—параллельны плоскости пола, ребра стропилъ—наклонны къ плоскости основанія крыши и т. п.

32. Двойной наугольникъ. Для проведенія перпендикулярныхъ линій къ плоскости, а это встрѣчается очень часто, напримѣръ, когда нужно къ доскѣ придѣлать перпендикулярный брусъ, то употребляютъ для этого приборъ *двойной наугольникъ* (чер. 79). Этотъ приборъ состоитъ изъ двухъ простыхъ наугольниковъ *АБД* и *АБС*, скрѣпленныхъ между собою по ребру *АБ*. Положивъ линейки этого прибора: *БД* и *БС* на доску *МВ*, мы получимъ ребро *АБ*, перпендикулярное къ доскѣ, такъ какъ это ребро будетъ перпендикулярно къ двумъ прямымъ *БД* и *БС*, проведеннымъ на плоскости чрезъ основаніе *Б* перпендикуляра *БА*. Передвигая этотъ приборъ до данной точки *О*, лежащей на доскѣ, или до точки *Е*, лежащей внѣ доски, но такъ, чтобы ребро его *АБ* совпадало бы каждый разъ съ данной точкой, мы и получимъ перпендикулярныя линіи *ОК* и *ЕН*, по направленію которыхъ и можемъ укрѣплять брусъ



Чер 79.

Если этотъ наугольникъ приложить ребромъ *АБ* къ какой-нибудь прямой, то линейки *БД* и *БС* укажутъ положеніе плоскости, перпендикулярной къ данной прямой.

33. Вертикальныя и горизонтальныя плоскости. Плоскость, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ отвѣса, называется *отвѣсной или вертикальной плоскостью.* Весьма часто при установкѣ вертикальныхъ досокъ, или при кладкѣ стѣнъ зданій, пользуются обыкновеннымъ отвѣсомъ, шнуръ котораго для удобства ношенія наматывается на деревянную катушку, свободно вращающуюся на кругломъ стержнѣ съ ручкой (чер. 80). Для болѣе же точной провѣрки вертикальности плоскостей, употребляется особый приборъ, изображенный на чер. 81, и который называется

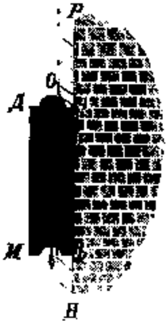


Чер. 80

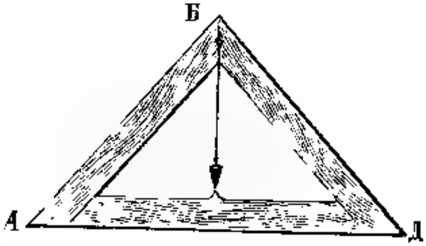


Чер. 81.

доской Онъ состоитъ изъ бруска, боковыя ребра котораго *АБ* и *ДМ* параллельны между собою, а также параллельны и средней линіи *КО*, ясно начерченной на брускѣ. Эту линію *КО* называютъ линіей точности. Въ точкѣ *О* этой линіи, на верху бруска, укрѣпленъ одинъ изъ концовъ нити съ отвѣсомъ. Провѣряютъ вертикальность какой-либо плоскости, напр., плоскости стѣны *PH* (чер. 82) этимъ приборомъ такъ: накладываютъ одно изъ боковыхъ реберъ бруска, напримѣръ, ребро *АБ* на провѣряемую плоскость, и, если послѣдняя вертикальна, то, конечно, должны быть вертикальны *АБ* и ея параллельная линія точности *КО*; слѣдовательно, нить съ отвѣсомъ должна совмѣщаться съ этой линіей точности. Обыкновенно дѣлаютъ двойную установку, т. е. послѣ совпаденія ребра *АБ* съ плоскостью, повертываютъ приборъ такъ, чтобы боковое ребро *ДМ* заняло мѣсто ребра *АБ*. Если нить съ отвѣсомъ, въ обоихъ положеніяхъ прибора, показываетъ линію точности *ОК*, то можно быть увѣреннымъ, что она вертикальна, а, слѣдовательно, вертикальна и плоскость *PH*.



Чер. 82.



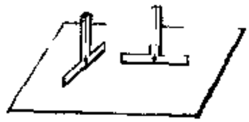
Чер 83.

Плоскость, перпендикулярная къ отвѣсу, называется горизонтальной. Для установки плоскости въ горизонтальномъ направленіи существуютъ особые приборы: ватерпасъ и уровень.

34. Ватерпасъ. Ватерпасъ состоитъ (чер. 83) изъ трехъ брусьевъ, соединенныхъ между собою такъ, что они образуютъ равнобедренный треугольникъ *АБД*.

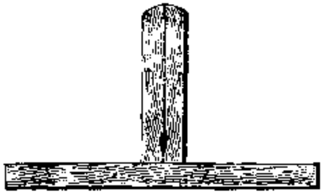
Въ точкѣ *Б* прикрѣплена нить, на концѣ которой повѣшена гирька, а подъ гирькой, въ серединѣ основанія треугольника, находится или остріе, или же просто вырубка. Если брусъ *АД* ватерпаса лежитъ на горизонтальной плоскости, то гирька приходится надъ остріемъ, такъ какъ перпендикуляръ, опущенный изъ вершины равнобедреннаго треугольника, падаетъ въ середину основанія (если перпендикуляръ — отвѣсъ, то, значитъ, основаніе прибора,

т. е. брусъ *АД* будетъ горизонтальнымъ). Если же гирька отвѣса не придется на остріе, то значитъ брусъ *АД* имѣетъ наклонное направленіе, а значитъ, и та плоскость, на которой находится ватерпасъ, также будетъ наклонна. Замѣтимъ, что если хотятъ узнать, горизонтальна ли плоскость, то слѣдуетъ устанавливать ватерпасъ въ нѣсколькихъ направленіяхъ (чер 84).

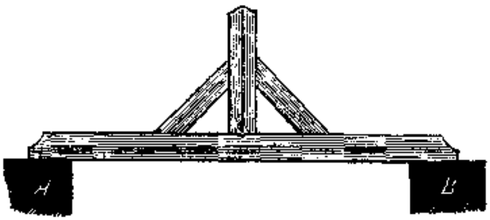


Чер 84.

Иногда ватерпасы бываютъ и другого устройства (чер. 85 и 86).

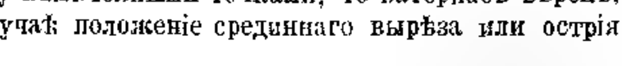


Чер 85.



Чер 86.

Прежде чѣмъ употреблять какой либо ватерпасъ, нужно его повѣрить. Повѣрка этого прибора состоитъ въ томъ, что нужно убѣдиться, дѣйствительно ли срединная его вырубка, или остріе. назначено вѣрно, т. е., что отвѣсъ перпендикуляренъ къ нижней поверхности бруса (чер. 86). Съ этою цѣлію кладутъ концы бруса на два какіе нибудь предмета, напримѣръ, хоть на два вбитыхъ въ землю кола и отмѣчаютъ чѣмъ либо на нижней боковой поверхности бруса ту точку, черезъ которую проходитъ нить отвѣса. Затѣмъ, перекладываютъ ватерпасъ такъ, чтобы онъ помѣстился на тѣхъ же кольяхъ, но обратными концами, т. е., гдѣ былъ сначала одинъ конецъ, тамъ ставятъ другой конецъ, и обратно, и опять отмѣчаютъ на боковой поверхности бруса точку, черезъ которую пройдетъ нить отвѣса. Если срединный вырѣзъ или остріе будутъ находиться какъ разъ посрединѣ между намѣченными точками, то ватерпасъ вѣренъ; въ противномъ же случаѣ положеніе срединнаго вырѣза или острія надо исправить, помѣстивъ ихъ на срединѣ между намѣченными точками.



Чер 87

35. Уровень. Уровень (чер. 87) состоитъ изъ запаенной, слегка изогнутой къ верху стеклянной трубки, обдѣланной въ мѣдную оправу, и укрѣпленной на мѣдной линейкѣ. Въ верхней части мѣд-

ной оправы сдѣланъ вырѣзъ, такъ что съ этой стороны видна стеклянная трубка. Въ стеклянную трубку налита подвижная неприлипающая жидкость *), и налита такъ, что въ трубкѣ остается пузырекъ безвоздушнаго пространства, наполненнаго парами налитой жидкости. Этотъ пузырекъ по своей легкости занимаетъ всегда высшее мѣсто въ трубкѣ и стоитъ по срединѣ ея въ томъ только случаѣ, когда трубка имѣетъ горизонтальное положеніе; если же одинъ конецъ ея ближе къ землѣ, чѣмъ другой, то пузырекъ, стремясь занять самое верхнее положеніе, тотчасъ же удалится отъ средины трубки и пойдетъ къ тому концу ея, который выше, т. е. дальше отъ земли.

Чтобы узнать, горизонтальна ли какая нибудь плоскость, ставятъ на нее въ различныхъ положеніяхъ уровень, и если пузырекъ всегда будетъ стоять по срединѣ трубки, то плоскость горизонтальна; если же пузырекъ уйдетъ отъ средины трубки, то плоскость—не горизонтальна, и чтобъ привести ее въ горизонтальное положеніе, надо понемногу поднимать или опускать одну сторону ея, пока пузырекъ придетъ въ самую средину трубки. При помощи винтовъ, находящихся на краяхъ прибора, тотъ или другой конецъ трубки можно приблизить къ линейкѣ или удалить отъ нея. Этимъ пользуются, когда вывѣряютъ уровень.

Въ послѣднее время стали часто употреблять уровень другого устройства, изображенный на черт. 88. Онъ состоитъ изъ круглой, плоской стеклянной банки, обдѣланной со всѣхъ сторонъ въ мѣдную оправу, прикрѣпленную къ подставкѣ. Сверху прибора въ оправѣ дѣлается вырѣзъ и обозначеніе на стеклѣ центра верхней плоскости прибора. Въ банку наливается также жидкость и оставляется пузырекъ, наполненный парами жидкости. Этотъ пузырекъ приходится всегда въ центрѣ верхней плоскости прибора только въ томъ случаѣ, когда приборъ лежитъ на горизонтальной плоскости; въ противномъ случаѣ этотъ пузырекъ не приходится въ центрѣ. Работаютъ этимъ приборомъ такъ-же, какъ и предыдущимъ.



Чер. 88

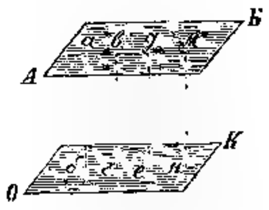
Пластинка. Въ обыкновенной практикѣ установки предметовъ въ горизонтальной плоскости нерѣдко встрѣчается необходимость поставить одинъ предметъ выше другого на очень малую, но вполнѣ опредѣленную, величину, напримѣръ на $^1/_{100}$, $^2/_{100}$ и т. д. части

*) Винный спиртъ или сѣрный эфиръ

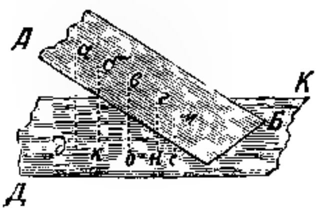
сажени; такъ, напримѣръ, при установкѣ рельсъ на полотнѣ желѣзной дороги, при поворотахъ пути, наружный рельсъ ставится нѣсколько выше другого. Въ такихъ случаяхъ употребляется приборъ *пластинка*. Онъ состоитъ изъ желѣзной ступеньчатой пластинки, каждая ступенька которой толщиной въ $^1/_{100}$ (0,1) сажени. И вотъ, если надо одинъ предметъ *А* (чер. 86) поставить выше другого предметъ *В*, напримѣръ, на $^2/_{100}$ саж. (0,2), то сначала устанавливаютъ ихъ по ватерпасу или по уровню горизонтально, а потомъ, снявъ приборъ, кладутъ сверху на предметъ *В*, т. е. на тотъ, который долженъ быть ниже, пластинку, и вновь ставятъ ватерпасъ или уровень, но такъ, чтобы одинъ конецъ его всталъ не прямо на предметъ, а на пластинку, на ея вторую ступеньку. Послѣ этого начинаютъ приподнимать предметъ *А* до тѣхъ поръ, пока нижній брусъ ватерпаса или уровня не встанетъ горизонтально. Укрѣпивъ предметъ *А* въ такомъ положеніи, чтобы онъ не опустился внизъ, снимаютъ ватерпасъ. При такой установкѣ, конечно, предметъ *А* будетъ выше предмета *В* на данную величину, на $^2/_{100}$ (0,2) сажени.

36. Двугранные и многогранные углы. Если двѣ плоскости, какъ напримѣръ, *АБ* и *АК*, при своемъ продолженіи никогда не встрѣчаются, то они будутъ *параллельны* одна другой (черт. 89). *Разстояніе между параллельными плоскостями вездѣ одинаково*, т. е. линія *аб = вг = де* и т. п.

Если двѣ плоскости, какъ напримѣръ, *АБ* и *ДК* (чер. 90), при своемъ продолженіи встрѣчаются гдѣ-либо, то они будутъ *не параллельны* одна другой и *разстоянія между ними: ад, бк, во, гн, мс* и т. д. *не одинаковы*. Эти разстоянія уменьшаются съ приближеніемъ плоскостей одна къ другой.



Чер. 89



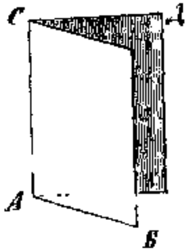
Чер 90.



Чер 91.

Двѣ плоскости всегда пересѣкаются по прямой линіи (чер. 91). Параллельныя, непараллельныя и пересѣкающіяся плоскости встрѣчаются всюду, такъ, напримѣръ, потолки и полы комнатъ парал-

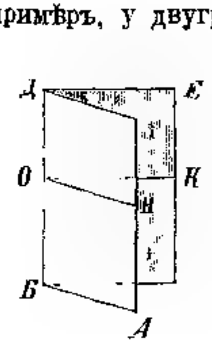
лельны, плоскости крышъ и поверхность земли —не параллельны, плоскости смежныхъ стѣнъ зданій, ящиковъ, обыкновенныхъ сундуковъ — пересѣкающіяся плоскости.



Чер. 92

Двѣ плоскости, пересѣкаясь между собою, образуютъ *двугранный уголъ* (черт. 92). Прямая *АС*, въ которой плоскости пересѣкаются, называется *ребромъ двуграннаго угла*; плоскости же -его *гранями*. Двугранный уголъ обозначается четырьмя буквами, причемъ буквы, поставленныя на ребрѣ, пишутся и читаются въ срединѣ, напримѣръ, данный уголъ читается и пишется такъ: уголъ *БАСД*. Двугранные углы называются *равными*, если они при наложеніи могутъ совмѣститься такъ, что ребро и обѣ грани одного угла идутъ по ребру и гранямъ другого.

Наклонъ плоскостей двуграннаго угла можетъ быть различенъ. ***О величинѣ двуграннаго угла судятъ по линейному углу***, который составляется прямыми, проведенными по гранямъ двуграннаго угла перпендикулярно къ ребру въ одной какой-либо точкѣ; такъ, напримѣръ, у двуграннаго угла *АБДЕ* (черт. 93) линейнымъ угломъ будетъ $\angle КОН$, составленный линіями *КО* и *НО*, перпендикулярными къ ребру *БД* въ точкѣ *О*. Линейный уголъ двуграннаго угла называется иначе *угломъ наклоненія*. Съ увеличеніемъ двуграннаго угла увеличивается и его уголъ наклоненія и обратно. ***Всѣ углы наклоненія одного двуграннаго угла равны между собою.*** Если уголъ наклоненія прямой, то и двугранный уголъ будетъ прямой. Грани прямого двуграннаго угла называются *взаимно-перпендикулярными*.

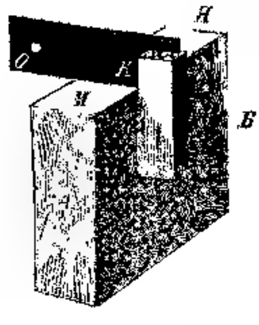


Чер. 93

37. Наугольникъ Весьма часто приходится строгать брусья съ перпендикулярными плоскостями; также нерѣдко приходится и соединять доски одну съ другой подъ прямымъ угломъ. Для этой цѣли при работахъ употребляется обыкновенный, провѣренный *столярный наугольникъ* *).

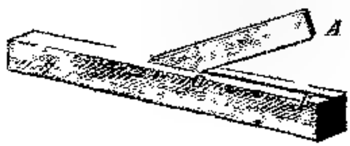
*) Провѣрка этого прибора подробно изложена въ моемъ руководствѣ «Азбука графической грамотности».

Этимъ приборомъ работаютъ въ такихъ случаяхъ вотъ какъ: толстой линейкой наугольника (черт. 94) прикладываютъ плотно къ одной плоскости бруса *АБ*, а другую линейку наугольника, тонкую, прикладываютъ къ другой плоскости бруса *МН*. Взявъ въ правую руку наугольникъ, его толстую линейку, а въ лѣвую руку брусъ, ведутъ наугольникъ отъ *М* къ *Н*, или обратно, постоянно прижимая толстую линейку къ выструганной плоскости *АБ*, и смотрятъ на свѣтъ: если оказывается просвѣтъ между ребромъ *ОК* тонкой линейки и плоскостью *МН* бруса, то, значитъ, плоскость *МН* бруса не перпендикулярна къ плоскости *АБ*; если же нѣтъ просвѣта, то обѣ эти плоскости бруса перпендикулярны.



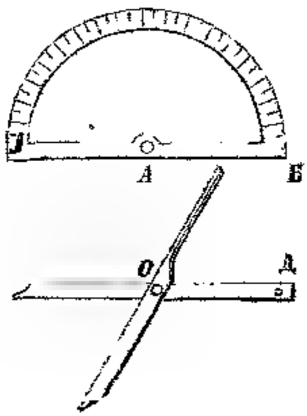
Чер. 94.

38. Герунекъ. Для соединенія плоскостей подъ угломъ въ 45^0 употребляется приборъ *герунокъ* (чер. 95), котораго планки прикрѣплены такъ, что $\angle АоБ = 45^0$. Провѣрка этого прибора производится такимъ образомъ: прикладываютъ къ правильно выструганной плоскости деревяннаго бруса нижнюю планку герунка и проводятъ по ребру его *АО* линію на плоскости бруса, и затѣмъ, по наугольнику провѣряютъ величину полученнаго угла; если этотъ уголъ будетъ равенъ $^1/_2$ прямого угла, то, значитъ, герунокъ вѣренъ. Работаютъ этимъ приборомъ также, какъ и простымъ наугольникомъ.



Чер. 95.

39. Транспортиръ съ малкой. Для соединенія плоскостей подъ даннымъ угломъ и для измѣренія двугранныхъ угловъ, встрѣчающихся на предметахъ, иногда употребляется особый приборъ, *транспортиръ съ малкой* (черт. 96). Этотъ приборъ устроенъ такъ. Въ центрѣ транспортира сдѣлано круглое отверстіе



Чер. 96.

А, а на концѣ діаметра транспортира—шпинекъ *Б**). У малки съ нижней стороны подъ шалниромъ *О* есть шпинекъ, плотно входящій въ отверстіе *А* транспортира, а на одной изъ линеекъ малки сдѣлано отверстіе *Д*, которое насаживается плотно на шпинекъ *Б* транспортира. При такомъ устройствѣ малку можно надѣвать на транспортиръ. Измѣреніе этимъ приборомъ производится такъ. Прикладываютъ малку къ сторонамъ двуграннаго угла такъ, чтобы она охватывала уголъ частями своихъ линеекъ; затѣмъ, закрѣпивъ малку винтомъ *О*, надѣваютъ ее на транспортиръ и отсчитываютъ градусы.

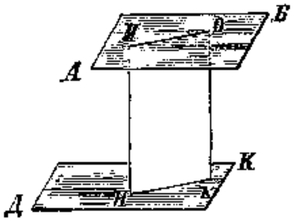
Чтобы соединить двѣ плоскости подъ даннымъ угломъ, то сначала линейки малки этого прибора ставятъ подъ даннымъ угломъ по транспортиру, а потомъ, закрѣпивъ линейки малки винтомъ, работаютъ, какъ и обыкновеннымъ наугольникомъ.



Чер 97.

40. Многогранный уголъ. Уголъ, составленный нѣсколькими пересѣкающимися плоскостями, называется ***многограннымъ угломъ*** (чер. 97). Точка *О*, въ которой сходятся плоскости, называется ***вершиною многограннаго угла***, а его плоскости—***гранями угла***. По числу граней многогранные углы бываютъ трегранные, четырегранные и т. п.

Двѣ параллельныя плоскости, какъ напримѣръ, плоскости *АБ* и *ДК* пересѣкаются какой либо третьей плоскостью *НМОЕ* всегда по линіямъ ***параллельнымъ***, между собою: прямая *МО* ‖ *НЕ* (чер. 98); такъ, напримѣръ, полъ и потолокъ комнаты пересѣкаются какою либо стѣною всегда по линіямъ параллельнымъ между собою.



Чер. 98.

Двѣ параллельныя прямыя, какъ напримѣръ, прямыя *МН* и *ОЕ* (чер. 98), заключенныя между параллельными плоскостями *АБ* и *ДК*, всегда *равны между собою: МН = ОЕ.*

*) Шпинекъ *Б* по ошибкѣ гравера изображенъ на другомъ концѣ діаметра транспортира

Задачи и упражненія.

1) Какъ установить прямую линію параллельно какой нибудь плоскости?

2) Какъ установить плоскость параллельно данной плоскости?

3) Какъ провести изъ данной точки прямую линію, перпендикулярную къ данной плоскости?

4) Въ данной точкѣ на плоскости возставить къ ней перпендикуляръ.

5) Провести плоскость, перпендикулярную къ прямой въ данной точкѣ.

6) Провѣрить уровнемъ горизонтальность верхней доски стола.

7) Провѣрить ватерпасомъ горизонтальность пола въ комнатѣ.

8) Провѣрить наугольникомъ перпендикулярность плоскостей различныхъ предметовъ комнаты.

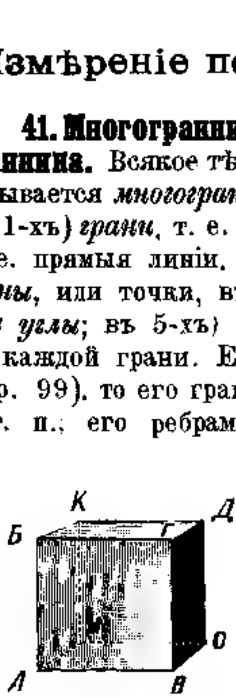
9) Провѣрить доскою вертикальность стѣнъ комнаты.

10) Дана прямая линія *АБ* на плоскости *МН* Провести черезъ эту прямую плоскость, перпендикулярную въ данной плоскости.

Отдѣлъ IV

Измѣреніе поверхностей и объемовъ тѣлъ.

41. Многогранники и ихъ части. Поверхность и объемъ многогранника. Всякое тѣло, ограниченное со всѣхъ сторонъ плоскостями, называется *многогранникомъ*. Во всякомъ многогранникѣ различаютъ: во 1-хъ) *грани*, т. е. плоскости, его ограничивающія, во 2-хъ) *ребра*, т. е. прямыя линіи, въ которыхъ встрѣчаются грани; въ 3-хъ) *вершины*, или точки, въ которыхъ сходятся ребра, въ 4-хъ) *двугранные углы*; въ 5-хъ) *многогранные углы* и въ 6-хъ) *линейные углы* на каждой грани. Если, напримѣръ, возьмемъ многогранникъ, кубъ (чер. 99), то его гранями будутъ:] *АБВГ*,] *БКДГ*,] *АБКМ* и т. п., его ребрами будутъ линіи: *АБ*, *МК*, *ОД*, *ВГ* и т. п.; его вершинами будутъ точки. *А*, *М*, *О*, *В*, *Б*, и т. п.; его двугранными углами будутъ углы, образуемые каждыми двумя сходящимися гранями, а именно: ∠ *ВАБК*, ∠ *АВГД*, ∠ *ВОДК* и т. п. Углы, составленные каждой изъ 3 сходящихся граней, будутъ многогранными углами куба, линейными же его углами будутъ всѣ углы, лежащіе на граняхъ.



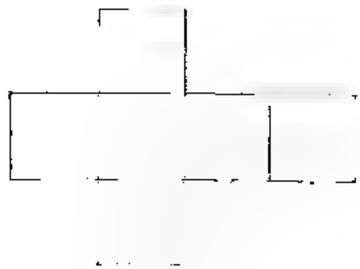
Чер. 99.

Всѣ грани многогранника, взятыя вмѣстѣ, составляютъ его полную поверхность. Весьма часто въ практикѣ нужно знать величину поверхности тѣлъ, такъ, напримѣръ, при оклейкѣ комнатъ обоями, при окраскѣ различныхъ предметовъ, при изготовленіи различныхъ вещей изъ листового матеріала и т. п.; поэтому нужно умѣть измѣрять поверхности тѣлъ.

Измѣрить поверхность многогранника, это значитъ узнать сумму площадей всѣхъ его граней, т. е. количество заключающихся въ нихъ квадратныхъ мѣръ, слѣдовательно, поверхность всякаго многогранника измѣряется квадратными мѣрами.

Поверхность многогранника можно развернуть на плоскость, и

тогда получимъ такъ называемую сѣтку многогранника. Такъ, например, (чер. 100) мзображена развернутая поверхность куба, т. е. его сѣтка, состоящая изъ 6-ти равныхъ квадратовъ. Вычерчиванiе сѣтокъ многогранниковъ, и вообще геометрическихъ тѣлъ, имѣетъ весьма важное значенiе при устройствѣ ихъ изъ различнаго листового матерiала.



Чер 100

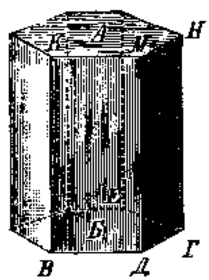
Часть пространства, которое занимаетъ всякiй многогранникъ, составляетъ его объемъ. Весьма часто въ практикѣ нужно знать величину объемовъ тѣлъ; такъ, напримѣръ, при вычисленiи вмѣстимости сосудовъ и различныхъ выемокъ въ землѣ, при расчетѣ каменныхъ построекъ и разныхъ предметовъ изъ какого либо матерiала и т. п.: слѣдовательно, нужно умѣть измѣрять объемы тѣлъ.

Измѣрить объемъ многогранника, или какого либо другого тѣла, это *значитъ узнать сколько въ немъ содержится другихъ объемовъ. принятыхъ за единицу мѣры.* Обыкновенно для измѣренiя объемовъ тѣлъ за единицу мѣры принимается объемъ, имѣющiй форму куба, т. е. многогранникъ, ограниченный шестью квадратами, и у котораго одно ребро равно какой нибудь линейной единицѣ мѣры. Такая единица объема называется *кубической единицей*; напримѣръ, кубическiй дюймъ, кубическiй футъ, кубическая сажень, и т. п. Такимъ образомъ вычислить объемъ какого набудь тѣла, это, другими словами сказать, нужно узнать, сколько въ немъ содержится кубическихъ мѣръ, принятыхъ за единицу измѣренiя.

Часть пространства, занимаемое какимъ либо многогранникомъ, или вообще какимъ либо предметомъ, называется *геометрическимъ тѣломъ*, въ отличiе отъ тѣла *физическаго*, подъ которымъ разумѣется не одно только пространство, но и то вещество, которымъ оно наполнено слѣдовательно, когда говорятъ о какомъ либо предметѣ и говорятъ о его вещественныхъ свойствахъ, какъ то: о вѣсѣ, о цвѣтѣ, о твердости, о матерiалѣ, изъ котораго онъ сдѣланъ и т. п., тогда, значитъ, говорятъ о немъ, какъ о тѣлѣ физическомъ; когда же судятъ только о формѣ предмета, т. е. говорятъ о формѣ занимаемаго имъ пространства, тогда, значитъ, говорятъ о немъ, какъ о тѣлѣ геометрическомъ.

Многогранники могутъ быть различной формы. Мы сначала разсмотримъ только тѣ изъ нихъ, которые чаще всего встрѣчаются въ обыкновенной практикѣ.

42. Призма. *Призмой называется всякій многогранникъ, ограниченный съ двухъ сторонъ параллельными гранями, а съ прочихъ сторонъ плоскостями, пересѣкающимися по линіямъ параллельнымъ.* На чертежѣ 101 изображена шестигранная прямая призма.



Чер. 101

Параллельныя грани ея A и $Б$, на которыя призма ставится, называются *основаніями призмы;* остальныя-же всѣ грани ея: $ДМКВ$, $ДМНГ$ и т п. называются *боковыми*. Ребра призмы: $ВД$, $ДГ$, $ГЕ$ и т. п., ограничивающія основанія, называются *ребрами основаній*, а ребра: $КВ$, $МД$, $НГ$ и т. п *называются боковыми ребрами призмы.* Всякая призма имѣетъ *двугранные углы* боковые и двугранные углы при основаніи, *трегранные* углы при вершинахъ и *линейные* углы на граняхъ.

По числу угловъ въ основаніи, призмы называются треугольными, четыреугольными и т. д.

Высотой призмы называются разстояніе между ея основаніями. Это разстояніе измѣряется перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ какой либо точки верхняго основанія на нижнее.

Призмы бываютъ *прямыя*, у которыхъ боковыя ребра перпендикулярны къ основаніямъ, и *наклонныя*, у которыхъ они не перпендикулярны. Призма называется *правильною*. если ея основаніе правильный многоугольникъ, и неправильною, если основаніе ея представляетъ неправильный многоугольникъ.

Измѣреніемъ можемъ убѣдиться, что всякая прямая правильная призма имѣетъ слѣдующія главнѣйшія свойства, у нея *равны между собою*: 1) *боковыя грани*, 2) *основанія*, 3) *боковыя ребра*, 4) *ребра основанія* и 5) всѣ *боковые двугранные углы* равны между собою, и всѣ *двугранные* углы при основаніяхъ.


Чер 102

Всякая четырегранная призма, имѣющая въ основаніи параллелограммъ, называется *параллелепипедомъ* (чер. 102). Если прямой параллелепипедъ будетъ имѣть въ основаніи прямоугольникъ, то онъ называется *прямоугольнымъ параллелепипедомъ;* комнаты обыкновенно имѣютъ форму прямыхъ параллелепипедовъ. Прямоугольный параллелепипедъ, ограниченный 6-ю квадратами, будетъ кубъ. Во всякомъ прямоугольномъ параллелепипедѣ 3 сходящіяся ребра при одной какой либо вершинѣ составляютъ его *три измѣренія:* длину, ширину и высоту. Высота прямоугольнаго параллелепипеда иногда называется *толщиною*,

какъ, напримѣръ, въ доскахъ, стеклахъ и въ различномъ листовомъ матеріалѣ: иногда же, какъ, напримѣръ, въ ящикахъ, въ колодцахъ и т. п., высота называется *глубиною*. Замѣтимъ, что въ прямоугольномъ параллелепипедѣ всѣ линейные углы — прямые, и всѣ двугранные углы—также прямые.

Форму призмы имѣютъ весьма многія тѣла: такъ, напримѣръ, зданія, комнаты, отдѣльныя части различныхъ столярныхъ и слесарныхъ работъ, сундуки, ящики и т. п.

43. Измѣреніе поверхности призмы. ***Боковою поверхностью призмы называется сумма площадей только однѣхъ боковыхъ граней.*** Если развернемъ *) одну боковую поверхность какой либо данной прямой призмы (чер. 103), то получимъ прямоугольникъ $АБДК$, у котораго основаніе $АК$ равно периметру основанія призмы, а высота $АБ$ равна высотѣ призмы; площадь этого прямоугольника $= АК \times АБ$, значитъ, и ***боковая поверхность прямой призмы равняется периметру основанія, умноженному на высоту***, т. е на боковое ребро. Замѣтимъ, что это выраженіе нужно понимать условно, а именно-это значитъ, что для опредѣленія количества квадратныхъ мѣръ въ боковой поверхности прямой призмы, нужно знать длину ея периметра основанія и длину бокового ея ребра, а затѣмъ, одно количество умножить на другое, и только полученное произведеніе дастъ намъ количество квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ боковой поверхности призмы. Также нужно понимать условно и всѣ послѣдующія выраженія поверхностей тѣлъ.



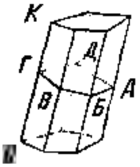
Чер. 103.

Если условимся выразить буквами части призмы: буквою $п$ — его боковую поверхность, буквою $д$ периметръ ея основанія и буквою $к$—ея высоту или боковое ребро, то получимъ такое короткое условное выраженіе боковой поверхности прямой призмы (формулу): $п = д \times к$ **).

*) Для наглядности, какъ въ этомъ случаѣ, такъ и во всѣхъ остальныхъ, при объясненія измѣренія поверхности тѣлъ можно пользоваться вырѣзанными сѣтками моделей, но при этомъ нужно обратить вниманіе на то, что истинную поверхность тѣла отдѣлить отъ самого тѣла нельзя, и что истинная геометрическая поверхность и всякая ея часть никакой толщины не имѣетъ

**) Во всѣхъ послѣдующихъ короткихъ условныхъ выраженіяхъ поверхности объемы и части тѣлъ будемъ всегда обозначать слѣдующими буквами: $п$ боковую поверхность тѣла, $П$ его полную поверхность, $О$—объемъ тѣла, $к$—его высоту, $д$—периметръ нижняго основанія, $е$—периметръ верхняго основанія, $С$—длина окружности нижняго основанія, $с$—длину окружности верхняго основанія, $н$ апоѳему—и $м$ производящую, $А$ и $Б$ площади основаній тѣлъ.

Боковая поверхность наклонной призмы равна периметру перпендикулярнаго сѣченія къ боковому ребру, умноженному на боковое ребро, или $n = m \times a$, гдѣ буква m выражаетъ периметръ перпендикулярнаго сѣченія къ боковому ребру, а буква a—боковое ребро призмы. Чтобы вычислить, напримѣръ, боковую поверхность данной наклонной призмы (черт. 104), то нужно вычислить длину периметра $АБВГД$, перпендикулярнаго сѣченія къ какому либо боковому ребру $КО$ данной призмы, и умножить найденную длину на величину ребра $КО$.



Чер. 104.

Полная поверхность всякой призмы равна боковой поверхности, сложенной съ суммою площадей обоихъ основаній, или $П = n + (А + Б)$, гдѣ $А$ и $Б$ выражаютъ площади основаній.

Примѣчаніе. Такъ какъ у куба всѣ ребра равны между собою, то, называя одно ребро куба черезъ a, получаемъ, что боковая его поверхность $n = 4a \times a = 4a^2$, полная же его поверхность $П = 4a^2 + a^2 + a^2 = 6a^2$, т. е. ушестеренной площади одной его грани; поэтому, увеличивая ребра куба, напримѣръ, въ 2, 3, 4 и т. д. разъ, мы площадь его одной грани увеличимъ въ 4, 9, 16 и т. д. разъ, т. е. ***поверхность одного куба всегда болѣе или менѣе поверхности другаго куба во столько разъ, во сколько квадратъ ребра одного изъ нихъ болѣе или менѣе квадрата ребра другаго.***

Если будетъ дана усѣченная призма, то для вычисленія какъ боковой поверхности ея, такъ и полной, нужно вычислить величину площади каждой ея грани, а потомъ найти ихъ общую сумму.

Примѣръ 1. ***Вычислить боковую и полную поверхность прямого параллелепипеда, у котораго одно ребро основанія—6-ти вершк., другое ребро основанія = 4 вершк., а высота = 8 вершк.***

Рѣшеніе. Периметръ основанія $= (6 \times 2) + (4 \times 2) = 20$ вершк. Боковая поверхность даннаго параллелепипеда $= 20 \times 8 = 160$ квадр. верш. Площадь его основанія $= 6 \times 4 = 24$ квадр. вершк. Сумма площадей обоихъ основаній $= 24 \times 2 = 48$ квадр. вершк. Полная поверхность даннаго параллел. $= 160$ квадр. вершк. $+ 48$ квадр. вершк $= 208$ квадр. вершк.

Примѣръ 2. ***Вычислить боковую и полную поверхность правильной прямой восьмиугольной призмы, если ребро ея основанія $= 7^1/_2$ сантим., апоѳема = около 9 сантиметровъ, а боковое ребро ея 20 санти.***

Рѣшеніе. Периметръ основанія данной призмы $= 7^1/_2 \times 8 = 60$ сантим.; боковая ея поверхность $= 60 \times 20 = 1200$ квадрат. сантим.;

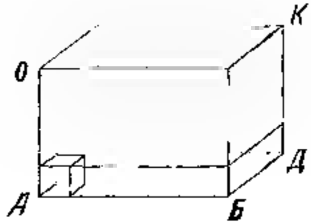
площадь ея основанія = (60 × 9) : 2 = 270 квадрат. сантим.; сумма площадей обоихъ основаній 270 × 2 = 540 квадрат. сантим. Полная поверхность данной призмы = 1200 + 540 = 1740 квадратныхъ сантиметровъ (приблизительно).

3) *Вычислить боковую и полную поверхность правильной наклонной треугольной призмы, если боковое ея ребро = 12 дюйм., ребро перпендикулярнаго сѣченія къ боковому ребру — 5 дюйм., одно ребро основанія = 6 дюйм., а высота треугольнаго основанія, опущенная на это ребро — около 5 дюйм.*

Рѣшеніе. Периметръ перпендикулярнаго сѣченія къ боковому ребру данной наклонной призмы = 5 × 3 = 15 дюйм.; боковая ея поверхность = 15 × 12 = 180 квадрат. дюйм.; площадь одного основанія = (6 × 5) : 2 = 15 квад. дюйм.; сумма площадей обоихъ основаній = 15 × 2 = 30 квадрат. дюйм.; полная поверхность данной призмы = 30 + 180 = 210 квадр. дюйм. (приблизительно)

44 Измѣреніе объема прямого параллелепипеда и куба.

Чтобы научиться измѣрять объемъ всякой призмы, сначала познакомимся съ тѣмъ, какъ узнать объемъ всякаго прямоугольнаго параллелепипеда. Положимъ, нужно измѣрить объемъ параллелепипеда AK (черт. 105) кубическими дюймами. Пусть одно ребро его основанія $AБ$ будетъ равно 6 дюймамъ, другое ребро основанія $БД$ равно 3 дюймамъ, а высота его AO = 4 дюймамъ. Если мы станемъ накладывать на основаніе даннаго параллелепипеда кубическіе дюймы, то каждый изъ нихъ займетъ на основаніи мѣсто, равное одному квадратному дюйму; значитъ, заполнивъ все основаніе кубическими дюймами, мы получимъ одинъ слой кубическихъ дюйм., и ихъ помѣстится въ немъ столько, сколько квадр. дюйм заключается въ площади основанія, т. е. 6 × 3 = 18 кубическихъ дюймовъ. Чтобы узнать, сколько всего помѣстится кубическихъ дюймовъ въ данномъ параллелепипедѣ, то мы должны число кубическихъ дюймовъ одного слоя умножить на количество слоевъ, а послѣднихъ будетъ четыре, такъ какъ каждый слой кубическихъ дюйм. по высотѣ тѣла занимаетъ только 1 линейный дюймъ; слѣдовательно, всего кубическихъ дюйм. въ данномъ тѣлѣ будетъ 18 × 4 = 72 кубическихъ дюйма.



Чер 105

Итакъ, *объемъ прямого параллелепипеда равняется площади основанія, умноженной на высоту.* Замѣтимъ, что это выраженіе

надо понимать условно, а именно: это значитъ, что для опредѣленія объема прямого параллелепипеда нужно узнать количество квадратныхъ мѣръ, содержащихся въ его основаніи (для чего нужно длину основанія умножить на ширину) и длину его высоты, а затѣмъ, одно количество умножить на другое; и только полученное произведеніе дастъ намъ количество кубическихъ мѣръ, содержащихся въ объемѣ даннаго прямого параллелепипеда. Также нужно понимать условно и всѣ послѣдующія выраженія объемовъ тѣлъ.

Изъ вышеизложеннаго видно, что для измѣренія объема прямого параллелепипеда нужно измѣрить одною линейною мѣрою его длину, ширину и высоту, и эти три числа перемножить между собою, какъ отвлеченныя числа; полученное произведеніе и покажетъ искомое число кубическихъ единицъ въ данномъ прямомъ параллелепипедѣ. Обозначая для краткости длину прямого параллелепипеда буквою *а*, ширину его *б* и высоту—*к*, получимъ: объемъ прямого параллелепипеда $О = а \times б \times к$.

Такъ какъ у куба ширина и высота равны между собою, то для измѣренія его объема достаточно измѣрить только одно его ребро линейной мѣрой и помножить полученное количество само на себя три раза; такъ, напримѣръ, если ребро куба равно 4 дюйм., то его объемъ равенъ 4 × 4 × 4 = 64 куб. дюйм.

45. Таблица кубическихъ мѣръ. На основаніи вышеизложеннаго измѣренія объема всякаго куба можно составить слѣдующую таблицу русскихъ кубическихъ мѣръ:

Кубич. саж. = 3 × 3 × 3 = куб. арш.
» арш. = 16 × 16 × 16 = 4096 куб. верш.
» саж. = 7 × 7 × 7 = 343 куб. фут.
» футъ = 12 × 12 × 12 = 1728 куб. дюйм
» дюймъ = 10 × 10 × 10 = 1000 куб. линій.
» миля = 7 × 7 × 7 = 343 куб. верстъ.
» верста = 500 × 500 × 500 = 125000000 куб. саж.

Для измѣренія объема жидкихъ тѣлъ у насъ употребляется *ведро*, т. е. сосудъ, вмѣстимость котораго = 750 куб. дюйм.; 40 ведеръ составляютъ *бочку*.

Для измѣренія небольшихъ объемовъ въ послѣднее время стали иногда употреблять у насъ такъ называемыя кубическія мѣры десятичной системы. Въ этой системѣ принята единица кубическій метръ, т. е. такой кубъ, у котораго одно ребро равняется 1 линейному метру.

1 кубич. метръ имѣетъ $10 \times 10 \times 10 = 1000$ кубич. дециметр.
1 » децим. » $10 \times 10 \times 10 = 1000$ » сантим.
1 » сантим. » $10 \times 10 \times 10 = 1000$ » миллим.

Значитъ, 1 куб. метръ $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ куб. децим. $= 1000 \times 1000 = 1000000$ куб сантиметр.

Для измѣренія объема жидкихъ тѣлъ въ этой системѣ употребляется *литръ* или кубическій дециметръ. Литръ имѣетъ 10 децилитровъ и 100 сантилитровъ.

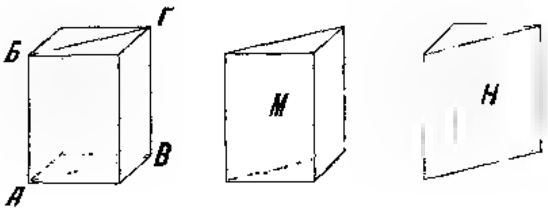
10 литровъ составляютъ декалитръ.
100 » » гектолитръ.

Число, полученное отъ умноженія какого-либо числа на самого себя 3 раза, называется кубомъ даннаго числа; такъ, напримѣръ. 8 есть кубъ 2, такъ какъ $8 = (2 \times 2 \times 2)$; 27 есть кубъ 3, такъ какъ $27 = (3 \times 3 \times 3)$ и т. д Чтобы показать, что надо найти кубъ какого-нибудь числа, то пишутъ такъ: 2^3, 3^3, 4^3 и т. п.; это значитъ: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$; $2^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ и т п. Число два относительно своего куба 8 называется кубическимъ корнемъ 8; число 5 относительно своего куба 125 — будетъ кубическій корень 125 и т. п. Иногда нужно узнавать кубическій корень даннаго числа. Это дѣйствіе называется извлеченіемъ кубическаго корня изъ даннаго числа. Знакъ этого дѣйствія радикалъ съ цифрою 3, напримѣръ, $\sqrt[3]{343} = 7$.

46. Тѣла, равныя между собою. Если мы возьмемъ два какихъ-либо куба, склеенныхъ, напримѣръ. изъ папки, у которыхъ ребро одного будетъ равно ребру другого, то такіе кубы будутъ равны между собою. Признакомъ ихъ равенства будетъ то, что одинъ кубъ можно вложить въ другой и они вполнѣ совмѣстятся всѣми своими частями. *Такіе одноимянные и однородные многогранники, которые могутъ совмѣщаться всѣми своими частями, называются равными многогранниками.* Примѣромъ равныхъ многогранниковъ или вообще равныхъ тѣлъ могутъ служить: образецъ изъ дерева (модель) какого-нибудь предмета, внутренняя пустота формы изъ глины для литья этого предмета изъ металла и самый предметъ.

Замѣтимъ, что двѣ какія либо призмы только тогда будутъ равны между собою, когда основаніе и боковая грань одной изъ нихъ соотвѣтственно равны основанію и боковой грани другой и при этомъ они одинаково наклонены (двугранные углы ихъ равны между собою) и одинаково расположены. Въ этомъ можемъ убѣдиться совмѣщеніемъ такихъ призмъ, склеенныхъ изъ папки и вложенныхъ одна въ другую.

47. Объемъ прямой призмы. Если параллелепипедъ $A\Gamma$ (чер. 106) разрѣзать по направленію двухъ боковыхъ противоположныхъ ребръ $AБ$ и $B\Gamma$, то получимъ двѣ равныя треугольныя призмы M и H, потому что ихъ основанія равны между собою, какъ половинки параллелограмма, а также равны и ихъ боковыя грани и двугранные углы. Каждая изъ послѣднихъ треугольныхъ призмъ составляетъ $^1/_2$ даннаго параллелепипеда, а потому объемъ каждой изъ нихъ будетъ равенъ $^1/_2$ объема параллелепипеда, т. е. $^1/_2$ основанія параллелепипеда, умноженной на высоту его; но $^1/_2$ основанія параллелепипеда составляетъ основаніе каждой полученной треугольной призмы; значитъ, *объемъ треугольной призмы равенъ площади основанія, умноженной на высоту.*



Чер. 106.



Чер. 107.

Всякую прямую многоугольную призму (чер. 107) можно разрѣзать діагональными плоскостями на треугольныя призмы, всѣ онѣ будутъ имѣть ту же высоту, какъ и многоугольная призма, а сумма ихъ основаній составляетъ основаніе данной многоугольной призмы, поэтому, *объемъ всякой прямой многоугольной призмы равняется произведенію площади ея основанія на высоту.*

Примѣръ. *Вычислить объемъ правильный прямой шестиугольной призмы, если ребро ея основанія* — $1^3/_4$ *вершк., апоѳема основанія* около $1^1/_2$ *вершка, а высота ея* = 10 *вершковъ.*

Рѣшеніе. Периметръ основанія данной призмы — $1^3/_4 \times 6 = 10^1/_2$ вершк.; площадь ея основанія = $(10^1/_2 \times 1^1/_2) : 2 = 7^7/_8$ квадратныхъ вершковъ; объемъ данной призмы = $7^7/_8 \times 10 = 78^3/_4$ кубическихъ вершка (приблизительно).

48. Тѣла, равновеликія по объему.

Если мы возьмемъ кубъ, ребро котораго будетъ равно 6 вершкамъ, и прямой прямоугольный параллелепипедъ, котораго измѣренія равны: 4, 6 и 9 дюймовъ, то объемъ даннаго куба будетъ равенъ $6 \times 6 \times 6 = 216$ кубическ. дюймамъ, и объемъ даннаго параллелепипеда тоже будетъ равенъ $4 \times 6 \times 9 = 216$ кубическ. дюйм.;

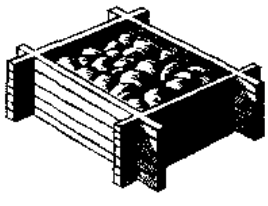
значитъ, объемы этихъ данныхъ тѣлъ будутъ равны между собою, хотя они и не совмѣстимы, такъ какъ имѣютъ различныя измѣренія. *Такія тѣла, которыя имѣютъ равные объемы, но не совмѣстимыя между собою, называются равновеликими.*

Изъ равновеликихъ призмъ укажемъ на слѣдующія: *всякая наклонная призма равновелика такой прямой призмѣ, у которой основаніе равно перпендикулярному сѣченію наклонной призмы, а высота ея—боковому ребру.* Въ этомъ можемъ убѣдиться такъ: склеить изъ папки двѣ полыя призмы, прямую и наклонную, у которыхъ бы перпендикулярныя сѣченія къ ребру были бы равны между собою, а также были бы равны и ихъ боковыя ребра. Наполнивъ ихъ пескомъ, мы увидимъ, что въ одной изъ нихъ его помѣстится столько же, сколько и въ другой.

На основаніи этого свойства наклонной призмы измѣряется ея объемъ. *Объемъ всякой наклонной призмы равенъ произведенію площади перпендикулярнаго сѣченія на ея боковое ребро.*

Замѣтимъ, что однородныя тѣла, т. е. сдѣланныя изъ одного и того же вещества и равновеликія между собою, всегда имѣютъ и одинъ вѣсъ.

49. Разборный кубическій полусаженокъ. Весьма часто при строительныхъ работахъ для измѣренія нѣкоторыхъ матеріаловъ, какъ-то: песку, извести, камня и т. п. употребляется такъ называемый разборный кубикъ (черт. 108). Онъ представляетъ собою разборный ящикъ, состоящій изъ отдѣльныхъ толстыхъ досокъ (или щитовъ), и который имѣетъ слѣдующіе размѣры: въ длину и ширину по 1 сажени и въ высоту $1^1/_2$ аршина, такимъ образомъ объемъ его равенъ $1^1/_2$ кубической сажени.



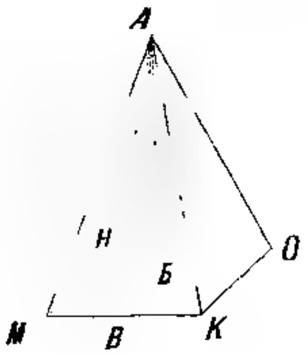
Чер 108.

50. Устройство призмъ. Чтобы составить прямоугольный параллелепипедъ изъ дерева, камня или металла по даннымъ его 3 ребрамъ, то сначала на матеріалѣ дѣлаютъ плоскость и на ней чертятъ основаніе параллелепипеда. Затѣмъ, черезъ всѣ стороны этого начерченнаго прямоугольника проводятъ плоскости перпендикулярныя къ основанію. Эти плоскости будутъ пересѣкаться по ребрамъ перпендикулярнымъ къ основанію. Далѣе на полученныхъ ребрахъ отмѣряютъ отъ основанія данную высоту параллелепипеда и черезъ полученныя точки проводятъ и второе основаніе тѣла. Такъ обтесываютъ камни, образующіе кладки стѣнъ, дѣлаютъ срубы изъ досокъ и т. п.

Чтобы сдѣлать по чертежу или по модели какую либо призму изъ листоваго матеріала, то для этого сначала чертятъ на матеріалѣ сѣтку боковой поверхности призмы, какъ напримѣръ, изображена на черт. 103 сѣтка боковой поверхности неправильной призмы, наблюдая при этомъ за тѣмъ, чтобы линейные углы и ребра въ сѣткѣ были бы равны соотвѣтственнымъ линейнымъ угламъ и ребрамъ чертежа или модели. Далѣе, прибавляютъ къ начерченной сѣткѣ фигуры основаній данной призмы и получаютъ полную сѣтку тѣла, изъ которой сгибаніемъ или распиливаніемъ по ребрамъ и соединеніемъ ихъ вмѣстѣ въ должномъ порядкѣ и получаютъ требуемую призму.

Когда нужно построить по чертежу или по модели какую либо призму изъ камня, металла или дерева, то поступаютъ такъ: съ одной стороны матеріала дѣлаютъ плоскость и на ней чертятъ одно основаніе данной призмы. Затѣмъ, отъ какого либо основанія дѣлаютъ одну боковую плоскость призмы, наблюдая, чтобы она съ плоскостью основанія образовала бы двугранный уголъ, равный соотвѣтствующему двугранному углу данной призмы, и на этой плоскости чертятъ фигуру, равную боковой грани призмы. Далѣе, проводятъ черезъ слѣдующее ребро основанія и одно изъ начерченныхъ боковыхъ реберъ новую плоскость и на ней чертятъ вторую фигуру, равную второй соотвѣтствующей боковой грани данной призмы и т. д. Наконецъ, дѣлаютъ и вторую плоскость основанія.

51. Пирамида. ***Пирамидой называется такой многогранникъ, который ограниченъ съ одной стороны многоугольникомъ, а съ прочихъ сторонъ треугольниками, сходящимися въ одной точкѣ.*** На черт. 109 изображена правильная квадратная пирамида. Точка A, въ которой сходятся всѣ треугольники, называется ***главною вершиною пирамиды***; грани треугольники: ΔAMK, ΔAKO и т. п., прилежащія къ главной вершинѣ, называются ***боковыми гранями пирамиды***; а грань $MHOK$, противолежащая вершинѣ, называется ***основаніемъ пирамиды***. Ребра: AM, AH, AO, AK, называются ***боковыми ребрами пирамиды***, а ребра MH, HO, OK и KM—***ребрами основанія пирамиды***. Всякая пирамида имѣетъ еще ***боковые двугранные*** углы, двугранные углы при основаніи, ***трегранные*** углы, ***многогранный*** уголъ при главной вершинѣ пирамиды и ***линейные*** углы.



Чер. 109.

Высотою пирамиды называется перпендикуляръ $AБ$, опущенный изъ вершины пирамиды на ея основаніе. По числу угловъ въ основаніи пирамиды называются ***треугольными***, ***четыреугольными*** и т. д.

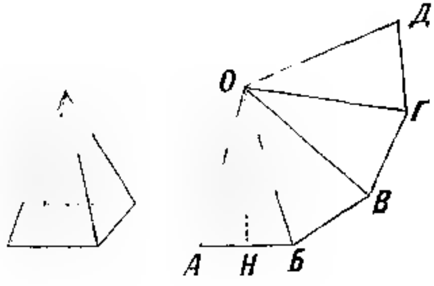
Правильною пирамидою называется та, у которой основаніемъ служитъ правильный многоугольникъ, а высота падаетъ въ центръ основанія. ***Неправильною*** пирамидою называется та, у которой основаніе имѣетъ форму неправильной прямолинейной фигуры и которой высота не падаетъ въ центръ основанія. У правильной пирамиды боковыя грани имѣютъ форму равнобедреннаго треугольника. Перпендикуляръ AB (черт. 109), опущенный изъ главной вершины правильной пирамиды на ребро основанія, называется ***апоѳемой пирамиды***.

Измѣреніемъ мы можемъ убѣдиться, что всякая правильная пирамида имѣетъ слѣдующія главнѣйшія свойства: 1) ***всѣ боковыя грани ея равны между собою***, 2) ***всѣ боковыя ребра равны между собою***, 3) ***всѣ апоѳемы равны между собою*** и 4) ***всѣ боковые дву-***

гранные углы равны между собою, а также равны и двугранные углы, лежащіе при основаніи.

Форму пирамидъ имѣютъ весьма часто крыши нѣкоторыхъ зданій, надгробные памятники и другіе предметы.

52. Измѣреніе поверхности пирамиды. Если мы развернемъ боковую поверхность какой либо правильной пирамиды (черт. 110), то мы получимъ фигуру, состоящую изъ ряда равныхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, основанія которыхъ составляютъ периметръ основанія пирамиды; высоты этихъ треугольниковъ равны апоѳемѣ пирамиды. Площадь полученной фигуры $АБВГДО$ равна



Чер 110.

суммѣ площадей, составляющихъ ея треугольниковъ, и въ то же время равна боковой поверхности пирамиды. Площадь $\Delta\, АОБ = \frac{АБ \times ОН}{2}$,

а такъ какъ треугольниковъ въ данной площади пять, то площадь фигуры $АБВГДО$, или боковая поверхность данной пирамиды равна $\frac{АБ \times ОН}{2} \times 5$; но 5 $АБ$ составляютъ периметръ основанія пирамиды, а $ОН$—апоѳема; поэтому, *боковая поверхность правильной пирамиды равняется половинѣ произведенія периметра основанія на апоѳему пирамиды*, или $п = \frac{о \times Н}{2}$.

Полная поверхность правильной пирамиды равна боковой ея поверхности, сложенной съ площадью основанія:

Поверхность неправильной пирамиды составляется изъ суммы площадей каждой грани отдѣльно.

Примѣръ. *Вычислить боковую и полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если ребро ея основанія = 10 дюйм., апоѳема ея = около 16 дюйм., и апоѳема ея основанія = около $8\frac{4}{5}$ дюйма.*

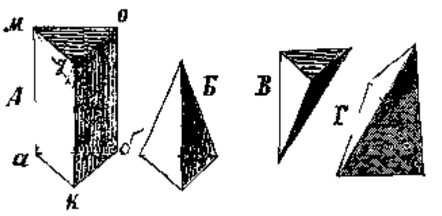
Рѣшеніе. Периметръ основанія данной пирамиды $= 10 \times 6 = 60$ дюйм.; боковая ея поверхность $= (60 \times 16) : 2 = 480$ квадр. дюйм.; площадь ея основанія $= (60 \times 8\frac{4}{5}) : 2 = 264$ квадр. дюйма. Полная поверхность данной пирамиды $= 480 + 264 = 744$ квадр. дюйма (приблизительно).

53. Равныя и равновеликія пирамиды. Двѣ какія либо *пирамиды* тогда только будутъ *равны между собою, когда основаніе*

и боковая грань одной изъ нихъ соответственно равны основанію и боковой грани другой, и при этомъ одинаково наклонены (двугранные углы ихъ равны между собою) *и одинаково расположены.* Въ этомъ можемъ убѣдиться совмѣщеніемъ такихъ пирамидъ, склеенныхъ изъ папки и вложенныхъ одна въ другую.

Если мы склеимъ изъ папки двѣ какія либо разноимянныя пирамиды, у которыхъ будутъ равновелики ихъ площади основанія и равныя высоты, то, насыпая ихъ пескомъ или зерномъ, мы убѣдимся, что песку помѣстится въ одной изъ нихъ столько же, сколько и въ другой, значитъ, онѣ равновелики между собою. Итакъ, *двѣ пирамиды съ равновеликими основаніями и равными высотами равновелики между собою.*

54. Измѣреніе объема пирамиды *). Если мы возьмемъ треугольную призму *А* (черт. 111) и проведемъ въ ней плоскость чрезъ ребро *аб* и вершину *д*, то отсѣчемъ отъ нея трегранную пирамиду *Б*, и у насъ останется четыреугольная пирамида *абомд* Если эту послѣднюю, въ свою очередь, пересѣчемъ плоскостью, проведенною чрезъ діагональ *мб* и вершину *д*, то получимъ еще двѣ



Чер. 111

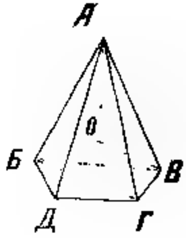
трегранныя пирамиды: *В* и *Г*. Итакъ *треугольная призма А* (черт. 111) *плоскостями можно раздѣлить на 3 треугольныя пирамиды: Б, В* и *Г*. Всѣ эти пирамиды будутъ *равновелики между собою;* въ чемъ можемъ убѣдиться такимъ образомъ: вырѣжемъ изъ картона и склеимъ такія три пирамиды, какъ пирамиды *Б, В* и *Г*, открытыя съ какой либо грани, и будемъ наполнять ихъ пескомъ; мы увидимъ, что каждая изъ нихъ будетъ вмѣщать песку ни больше, ни меньше, какъ и всѣ прочія. Подобнымъ образомъ можно раздѣлить на 3 равновеликія пирамиды и всякую другую треугольную призму. Итакъ, *объемъ всякой треугольной пирамиды можно разсматривать, какъ $\frac{1}{3}$ объема* **) *треугольной призмы, имѣющей съ*

*) Для наглядности можно пользоваться или раздѣльною деревянною или бумажною моделью тѣла или же моделью, вырѣзанною изъ картофеля, брюквы и т п растительнаго матеріала.

**) Можно доказать, что объемъ не только треугольной, но и всякой пирамиды въ три раза меньше объема призмы, имѣющій такое же основаніе и высоту. Для этого также сдѣлаемъ изъ картона полыя призму и пирамиду съ равными основаніями и высотой Отнявъ по основанію у этихъ тѣлъ, будемъ наполнять сухимъ пескомъ или зерномъ пирамиду и высыпать его въ призму Послѣдняя наполнится только тогда, когда мы ровно три раза наполнимъ пескомъ пирамиду и высыпемъ весь этотъ песокъ въ призму.

нею равныя основанія и равныя высоты, а объемъ всякой призмы, какъ намъ уже извѣстно, равенъ произведенію площади ея основанія на высоту, значитъ, ***объемъ треугольной пирамиды будетъ равенъ трети произведенія площади ея основанія на высоту, или*** $O = \frac{A \times K}{3}$.

Всякую многоугольную пирамиду можно разбить плоскостями, проводимыми черезъ діагонали основанія и вершину пирамиды, на треугольныя пирамиды, сумма объемовъ которыхъ составитъ объемъ данной многоугольной пирамиды; такъ, напримѣръ, многоугольная пирамида (черт. 112) $ДБОВГА$ = пирам. $ОБВА$ + пир. $БВГА$ + + пирам $ДБГА$; значитъ, ***объемъ всякой пирамиды равенъ*** $^1/_3$ ***произведенія площади основанія на высоту, или*** $O = \frac{A \times K}{3}$



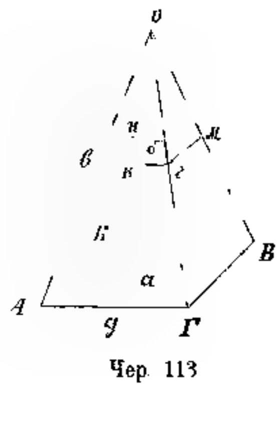
Чер. 112.

Примѣръ. Вычислить объемъ правильной пятиугольной пирамиды, если ребро ея основанія = 113 миллим., апоѳема основанія — около 78 миллим., а высота ея — 30 сантиметрамъ.

Рѣшеніе. Периметръ основанія данной пирамиды = $113 \times 5 = 565$ миллим.; площадь ея основанія $(565 \times 78) : 2 = 22035$ квадр. миллиметр.; объемъ ея = $(22035 \times 300) : 3 = 223500$ кубич. миллим. = 223 кубич. сантим. и 5 кубич. миллим.

55. Устройство пирамидъ. Чтобы сдѣлать по чертежу или по модели какую либо пирамиду изъ листового матеріала, то для этого сначала чертятъ сѣтку боковой поверхности пирамиды, какъ напримѣръ, изображена на черт. 110 сѣтка боковой поверхности квадратной пирамиды, наблюдая при этомъ за тѣмъ, чтобы линейные углы и ребра въ сѣткѣ были бы равны соотвѣтствующимъ линейнымъ угламъ и ребрамъ чертежа или модели. Далѣе, прибавляютъ къ начерченной сѣткѣ фигуру основанія данной пирамиды и получаютъ полную сѣтку тѣла, изъ которой сгибаніемъ или распиливаніемъ по ребрамъ и соединеніемъ ихъ вмѣстѣ въ должномъ порядкѣ и получаютъ требуемую пирамиду.

Когда нужно построить по чертежу или по модели полную правильную или неправильную пирамиду изъ камня, метала или дерева, то поступаютъ такъ: отрубку матеріала съ одной стороны даютъ видъ плоской поверхности, на которой и чертятъ фигуру основанія данной пирамиды. Затѣмъ отъ какого либо начерченнаго ребра основанія дѣлаютъ одну боковую плоскость пирамиды, наблюдая, чтобы она съ плоскостью основанія образовала бы двугранный уголъ, равный соотвѣтствующему двугранному углу данной пирамиды, и на этой плоскости чертятъ треугольникъ, равный боковой сторонѣ пирамиды. Далѣе, проводятъ черезъ слѣдующее ребро основанія и одно изъ начерченныхъ боковыхъ реберъ новую плоскость, и на ней чертятъ второй треугольникъ, равный 2 боковой грани данной пирамиды и т. д.



Чер. 113

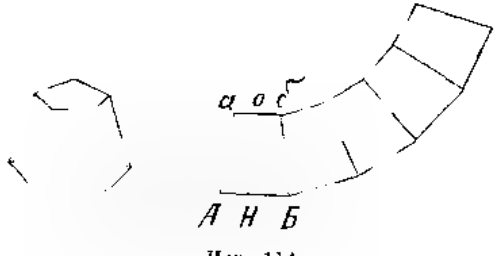
56. Усѣченная пирамида. Если какую либо данную пирамиду (черт. 113) разсѣчь плоскостью, параллельною ея

основанію, то она раздѣлится на два тѣла: къ вершинѣ отдѣлится новая пирамида ***внмг*** съ такимъ же числомъ граней, какъ и данная; къ основанію же отойдетъ тѣло, *АБВГвнмг*, называемое ***усѣченной пирамидой.*** Параллельныя ея грани *АБВГ* и *внмг* называются *основаніями* и представляють подобные многоугольники. Боковыя ея грани: *АвгГ*, *АвнБ* и т.п. будутъ трапеціи. Ребра: *Ав*, *Бн*, *Вм* и т. п будутъ боковыми ребрами усѣченной пирамиды, а ребра: *АВ*, *ББ*, *ВГ*, *АГ*, *вг*, *вн*, *нм*, *мг*—ребрами основанія. Каждая усѣченная пирамида имѣетъ боковые двугранные углы при основаніяхъ, трегранные углы при вершинахъ и линейные углы. *Высотой* усѣченной пирамиды называется разстояніе *аб* между обоими основаніями, а высота каждой боковой грани трапеціи, напримѣръ, прямая *дк*, называется *апоѳемою* усѣченной пирамиды.

Измѣреніемъ мы можемъ убѣдиться, что усѣченная правильная пирамида имѣетъ слѣдующія главныя свойства: 1) *всѣ боковыя грани правильной усѣченной пирамиды равны между собою*, 2) *всѣ боковыя ребра равны между собою*, 3) *всѣ ребра нижняго основанія равны между собою, а также и всѣ ребра верхняго основанія равны между собою*, 4) *во сколько разъ какое либо ребро нижняго основанія усѣченной пирамиды больше параллельнаго ему ребра ея верхняго основанія, во столько же разъ высота полной пирамиды болѣе высоты отсѣченной*, т. е. если (черт. 113) *АБ* больше ребра *вн* въ 2 раза, то, значитъ, и *ао* больше *бо* тоже въ два раза.

Форму правильныхъ и неправильныхъ усѣченныхъ пирамидъ имѣютъ иногда различныя земляныя выемки, крыши башенъ и т. п.

57. Измѣреніе поверхности правильной усѣченной пирамиды. Если мы развернемъ боковую поверхность какой либо правильной усѣченной пирамиды, то мы получимъ фигуру (черт. 114), состоящую изъ ряда равныхъ трапецій, основанія которыхъ составляютъ периметры основаній пирамиды, а высоты ихъ равны апоѳемѣ пирамиды. Площадь полученной фигуры равна суммѣ площадей, составляющихъ ея трапеціи, и въ то же время равна боковой поверхности усѣченной пирамиды.



Чер. 114.

Площадь трапеціи $АБаб = \frac{АБ + аб}{2} \times оН$, а площадь всѣхъ трапецій, или площадь всей фигуры, будетъ равна $5 (АБ + аб) \times оН$, или $\frac{5\,АБ + 5\,аб}{2} \times оН$; но $5\,АБ$

составляетъ периметръ нижняго основанія, а 5 *аб*—периметръ верхняго основанія, а *оН*—апоѳема пирамиды; значитъ, *боковая поверхность правильной усѣченной пирамиды равна полусуммѣ периметровъ обоихъ основаній, умноженной на апоѳему*, или $n = \frac{\partial + e}{2} \times н$.

Полусумму обоихъ периметровъ основанія можно замѣнить, на основаніи свойства трапеціи, периметромъ срединнаго сѣченія усѣченной пирамиды, и тогда можемъ сказать, что *боковая поверхность усѣченной пирамиды равняется периметру срединнаго сѣченія пирамиды, умноженному на апоѳему, или* $n = m \times н$, гдѣ буквою m выражается периметръ срединнаго сѣченія.

Чтобы найти полную поверхность усѣченной пирамиды, то надо къ боковой поверхности прибавить сумму площадей ея основаній.

Примѣръ 1. *Вычислить боковую и полную поверхность четыреугольной правильной усѣченной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, если ребро верхняго ея основанія = 4 дюйм., ребро нижняго основанія = 8 дюйм., а апоѳема ея = 8 дюйм.*

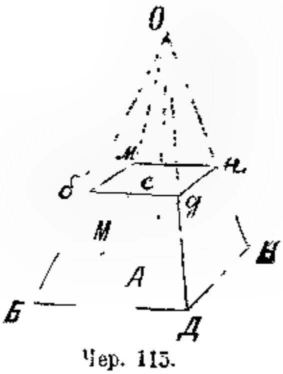
Рѣшеніе. Периметръ верхняго основанія данной пирамиды = $4 \times 4 = 16$ дюйм.; периметръ нижняго основанія $= 8 \times 4 = 32$ дюйм.; сумма периметровъ обоихъ ея основаній $= 16 + 32 = 48$ дюйм.; боковая поверхность $= \frac{48}{2} \times 8 = 192$ квадр дюйм.; площадь верхняго основанія $= 4 \times 4 = 16$ квадр. дюйм.; площадь нижняго основанія $= 8 \times 8 = 64$ квадр. дюйм.; полная поверхность данной усѣченной пирамиды $= 192 + 16 + 64 = 272$ квадр. дюйма.

Примѣръ 2. *Вычислить боковую поверхность правильной усѣченной трегранной пирамиды, если ребро срединнаго сѣченія = $2^1/_2$ вершк., а апоѳема ея = 4 вершкамъ.*

Рѣшеніе. Периметръ срединнаго сѣченія данной пирамиды $= 2^1/_2 \times 3 = 7^1/_2$ верш.; боковая ея поверхность $= 7^1/_2 \times 4 = 30$ квадр. вершк.

58. Измѣреніе объема правильной усѣченной пирамиды. *Объемъ усѣченной пирамиды равенъ объему цѣлой пирамиды безъ объема отсѣченной пирамиды.*

Примѣръ. *Вычислить объемъ правильной усѣченной пирамиды БМНДбмнд съ квадратнымъ основаніемъ, если ребро нижняго ея основанія БД = 6 дюйм., ребро верхняго ея основанія бд = 4 дюйм., а высота ея Ас = 8 дюйм.*



Чер. 115.

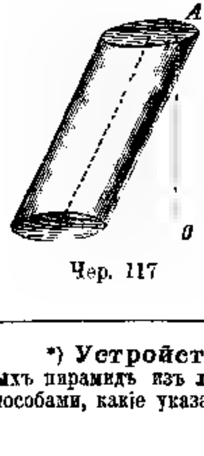
Рѣшеніе. Дополнимъ усѣченную пирамиду до полной (черт. 115) и найдемъ сначала высоты пирамидъ: полной и отсѣченной.

Такъ какъ намъ извѣстно, что высота полной пирамиды во столько разъ больше высоты отсѣченной пирамиды, во сколько разъ ребро нижняго основанія болѣе ребра верхняго основанія, то, значитъ, высота AO болѣе высоты cO во столько разъ, во сколько 6 болѣе 4, или, иначе сказать, въ высотѣ AO содержится 6 частей, а въ высотѣ cO — 4 такихъ же части. Высота усѣченной пирамиды $Ac = AO - cO$, и въ ней заключается $6 - 4 = 2$ части, въ которыхъ по заданію и содержится 8 дюймовъ. Если въ двухъ частяхъ высоты Ac содержится 8 дюймовъ, то, значитъ, въ 1-й части будетъ $8 : 2 = 4$ дюйма, а въ 6 частяхъ, или въ высотѣ AO полной пирамиды содержится $4 \times 6 = 24$ дюйма; въ высотѣ же отсѣченной пирамиды cO содержится $4 \times 4 = 16$ дюйм. Зная высоты пирамидъ, можно вычислить и объемъ данной усѣченной пирамиды. Площадь основанія полной пирамиды $= 6 \times 6 = 36$ кв. д., а ея объемъ $= (36 \times 24) : 3 = 288$ кубич. дюйм.; площадь основанія отсѣченной пирамиды $= 4 \times 4 = 16$ квадр. дюйм.; объемъ ея $= (16 \times 16) : 3 = 85^1/_3$ кубич. дюйм. Объемъ данной усѣченной пирамиды $= 288 - 85^1/_3 = 202^2/_3$ кубич. дюйма *).

59. Цилиндръ. Если мы возьмемъ прямоугольникъ (черт. 116) $АБВГ$ и станемъ его вращать около прямой $АВ$, какъ около оси, т. е. такъ, чтобы $АВ$ оставалось на мѣстѣ до тѣхъ поръ, пока $ВГ$ не придетъ на прежнее мѣсто, то получимъ ***прямой цилиндръ***. Съ двухъ сторонъ цилиндръ будетъ ограниченъ двумя равными параллельными кругами, а съ боковой — одною кривою поверхностью, которая образуется движеніемъ линіи $ВГ$.



Чер. 116.



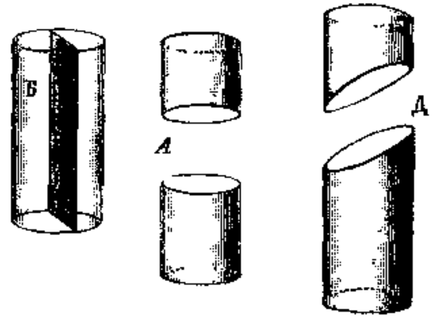
Чер. 117

Два круга цилиндра называются его ***основаніями***; линія $ВГ$ — ***образующею или производящею линіею***, а линія $АВ$, соединяющая оба центра основанія — ***осью цилиндра***. Эта линія $АБ$ будетъ и ***высотою*** прямого цилиндра. Цилиндръ можетъ быть наклоннымъ (черт. 117). Высота его тогда будетъ AO — перпендикуляръ, опущенный изъ какой либо точки верхняго основанія на плоскость нижняго основанія.

---

*) **Устройство усѣченныхъ пирамидъ.** Устройство всякихъ усѣченныхъ пирамидъ изъ листового или другого какого либо матеріала производится тѣми же способами, какіе указаны и при устройствѣ полныхъ пирамидъ.

Сѣченіе прямого цилиндра (черт. 118) плоскостью *А*, параллельной основанію, будетъ ***кругъ***; сѣченіе его плоскостью *Б*, перпендикулярною къ основанію, будетъ ***прямоугольникъ***; если же пересѣчь цилиндръ плоскостью *Д*, наклонной къ основанію, то получится въ сѣченіи ***эллипсъ***.



Чер 118.

Если мы возьмемъ правильную призму съ безчисленнымъ множествомъ боковыхъ граней, то ее можно принимать за цилиндръ. а потому и обратно, ***всякій цилиндръ можно разсматривать какъ правильную призму съ безчисленнымъ множествомъ боковыхъ граней***, у которой основаніе—правильный многоугольникъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ; периметръ этого многоугольника окружность основанія цилиндра, а боковое ребро этой призмы -производящая цилиндра.

Форму цилиндра имѣютъ весьма многіе предметы, какъ напримѣръ, бревна, ведра, кадки, проволока, паровые котлы, трубы и т. п.

60. Измѣреніе толщины цилиндрическихъ предметовъ. Чтобы измѣрить толщину предмета съ цилиндрическою поверхностью или внутренній діаметръ трубки, употребляются слѣдующіе приборы:

Простой кронциркуль. Этотъ приборъ (чер. 119) состоитъ изъ двухъ кривыхъ металлическихъ ножекъ, соединенныхъ между собою шарниромъ Работаютъ имъ такъ: концами его ножекъ *А* и *Б* плотно охватываютъ измѣряемый цилиндрическій предметъ по направленію, перпендикулярному оси цилиндра, а потомъ, не измѣняя положенія ножекъ, прикладываютъ ихъ къ измѣрительному прибору: аршину, футу или сантиметру и узнаютъ величину діаметра *АБ* даннаго предмета. Въ дорогихъ приборахъ у шарнира, на продолженіи одной ножки, находится дуга съ дѣленіями, а продолженіе другой ножки оканчивается остріемъ. При раствореніи ножекъ такого кронциркуля это послѣднее остріе указываетъ на какое нибудь дѣленіе дуги, цифра которой и означаетъ діаметръ цилиндра въ дюймахъ или сантиметрахъ.



Чер. 119.



Чер. 120.

Нутромѣръ (чер 120). Это -приборъ для

измѣренія внутренняго діаметра трубокъ Онъ устроенъ также, какъ и кронциркуль. Вставляютъ его ножки во внутреннюю цилиндрическую полость трубки и плотно прижимаютъ ихъ концы *А* и *Б* къ внутренней цилиндрической поверхности. Затѣмъ, не измѣняя положенія ножекъ, прикладываютъ ихъ также къ измѣрительному прибору и узнаютъ внутренній діаметръ трубки. Нутромѣромъ можетъ служить и всякій кронциркуль, перевернутый ножками около шарнира.



Чер. 121.

Двухсторонній кронциркуль (чер. 121). Это приборъ, въ которомъ соединены вмѣстѣ оба вышеописанные инструменты.

Штангенциркуль. Для измѣренія діаметра цилиндрическихъ предметовъ иногда употребляется инструментъ, называемый штангенциркулемъ. Онъ состоитъ изъ стальной линейки *АБ* (чер. 122), раздѣленной на мѣры, и двухъ ножекъ *В* и *Г*. Одна изъ нихъ *В* наглухо прикрѣплена къ концу линейки, другая же ножка *Г* можетъ передвигаться вдоль линейки вмѣстѣ съ коробкой *Е*. Въ коробкѣ сдѣланъ прорѣзъ, черезъ который видны дѣленія линейки; коробку можно прикрѣпить на мѣстѣ зажимнымъ винтомъ *К*. Для измѣренія діаметра цилиндра нужно помѣстить его кривою поверхностью между ножками прибора и отсчитать сквозь прорѣзъ коробки число дѣленій линейки.



Чер. 122.

Калибромѣры. Въ практикѣ различныя металлическія проволоки раздѣляются по толщинѣ своего діаметра на номера, что весьма удобно, такъ какъ указывать толщину ихъ въ частяхъ дюйма, или въ миллиметрахъ, было бы очень трудно. Для опредѣленія номера проволоки часто употребляютъ калибромѣръ. Онъ имѣетъ видъ пластинки (чер. 123) съ продольной съуживающейся щелью, около которой сдѣланы дѣленія. Кусочекъ проволоки вкладываютъ въ широкій конецъ щели и постепенно подвигаютъ его по направленію къ узкому концу ея. То дѣленіе, около котораго проволока застрянетъ, и дастъ



Чер. 123.

намъ точное понятіе о сравнительной толщинѣ ея, а рядомъ стоящая цифра укажетъ на соотвѣтствующій номеръ. Калибромѣры бываютъ различныхъ размѣровъ и съ самыми разнообразными дѣленіями, т. е. просто номерными, миллиметрическими, дюймовыми и т. п.

Примѣчанія: 1) Плоскіе, круглые или четыреугольные калибромѣры (чер. 124), по краямъ которыхъ сдѣлано нѣсколько десятковъ нумерованныхъ вырѣзовъ самой разнообразной ширины, употребляются для измѣренія и листоваго матеріала, который, также какъ и проволока, въ практикѣ дѣлится по толщинѣ на нѣсколько номеровъ.



Чер. 124.

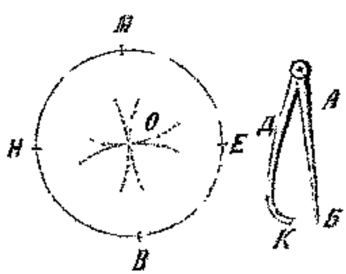
2) ***Плоскій калибромѣръ*** (чер. 125), состоящій изъ длинной заостренной пластинки съ дѣленіями, употребляется иногда для измѣренія внутренняго діаметра цилиндрическихъ трубокъ. Работаютъ имъ такимъ образомъ: калибромѣръ вставляютъ прямо въ трубку, обрѣзанную по перпендикулярному сѣченію, до тѣхъ поръ, пока онъ застрянетъ. Тогда смотрятъ на то его дѣленіе, которое совпадаетъ съ обрѣзомъ трубки. Цифра этого дѣленія и укажетъ размѣръ внутренняго діаметра трубки.



Чер. 125.

61. Опредѣленіе неизвѣстнаго центра на круглыхъ предметахъ. Для опредѣленія центра на основаніяхъ цилиндра и вообще на круглыхъ плоскостяхъ употребляются слѣдующіе приборы:

Центромѣръ (чер. 126). Этотъ приборъ устроенъ такъ же, какъ и кронциркуль, съ тою лишь разницею, что одна изъ его ножекъ *АБ*—прямая и оканчивается стальнымъ остріемъ, какъ у простого циркуля; другая же его ножка—*ДК*—изогнутая, какъ у кронциркуля, и оканчивается небольшимъ ребромъ. Для отысканія неизвѣстнаго центра даннаго круга *ВНМЕ*, основанія какого либо цилиндра, при помощи этого прибора, сначала откладываютъ гдѣ либо на произвольномъ отрѣзкѣ прямой линіи діаметръ даннаго круга и дѣлятъ его пополамъ; такъ находятъ радіусъ круга; затѣмъ, растворивъ ножки центромѣра на разстояніе найденнаго радіуса, прикладываютъ ихъ къ предмету



Чер. 126.

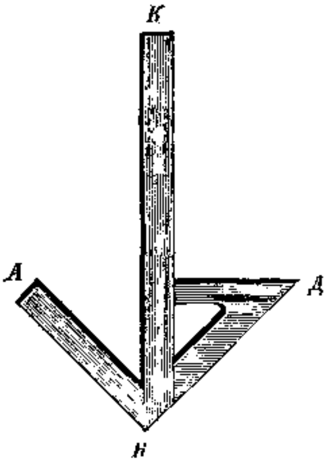
такъ, чтобы конецъ *К* кривой ножки прибора *ДК* упирался бы въ самую верхнюю часть боковой поверхности цилиндра около какой-нибудь точки *В* основанія, а остріемъ *В* прямой ножки центромѣра прочерчиваютъ на кругѣ небольшую дугу; затѣмъ, переносятъ кривую ножку прибора въ другую точку *М* основанія цилиндра и опять, упираясь ею въ боковую поверхность, прочерчиваютъ остріемъ другой ножки вторую дугу на основаніи; далѣе, подобнымъ же образомъ прочерчиваютъ на основаніи еще нѣсколько дугъ. Пересѣченіе всѣхъ этихъ дугъ въ точкѣ *О* на основаніи цилиндра и опредѣлитъ мѣсто, гдѣ долженъ быть центръ круга, который, затѣмъ, и намѣчаютъ *керномъ* (чер. 127), т. е. круглымъ или многограннымъ кускомъ заостренной стали. Какъ видно изъ описанія, центромѣромъ нельзя найти вполнѣ точный центръ круга на цилиндрическихъ предметахъ, а только можно намѣтить приблизительное мѣсто, гдѣ онъ долженъ находиться. Для опредѣленія точнаго центра въ кругѣ основанія цилиндрическаго предмета употребляется другой приборъ, описанный далѣе и называемый центровымъ наугольникомъ.



Чер. 127.

Центромѣромъ пользуются весьма часто и для измѣренія радіуса круглыхъ основаній различныхъ предметовъ, для чего раздвигаютъ его ножки настолько, чтобы конецъ его кривой ножки упирался бы въ верхнюю часть боковой поверхности тѣла, а остріе прямого конца намѣчаютъ въ центръ круга; затѣмъ, перенеся ножки прибора на измѣрительный приборъ, узнаютъ радіусъ круга.

Центромѣромъ часто пользуются и какъ ресмусомъ*) для проведенія на матеріалѣ линій, параллельныхъ краю плоскости, для чего, раздвинувъ ножки центромѣра на данное разстояніе, приставляютъ его кривую ножку къ данному краю плоскости, упирая ее въ другую плоскость, перпендикулярную данной, а остріемъ прямой ножки на данной плоскости и прочерчиваютъ при движеніи прибора необходимую черту.



Чер. 128.

За неимѣніемъ центромѣра, иногда употребляютъ для отысканія неизвѣстнаго центра въ кругѣ цилиндра и простой циркуль, которымъ работаютъ также, какъ и центромѣромъ.

Центровой наугольникъ (чер. 128). Этотъ приборъ состоитъ

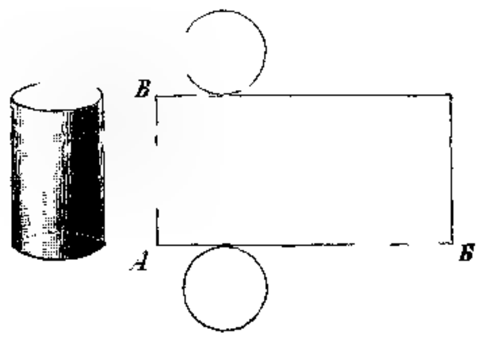
*) Этотъ приборъ описанъ въ моей книгѣ. «Азбука графической грамотности».

изъ двухъ скрѣпленныхъ деревянныхъ или металлическихъ пластинокъ *АБ* и *БД*, образующихъ $\triangle$ *АБД*. Сверху этихъ пластинокъ прикрѣплена наглухо линейка *БК* такъ, что ея ребро *БК* дѣлитъ $\angle$ *АБД* пополамъ. Когда нужно найти неизвѣстный центръ на кругломъ предметѣ, то прикладываютъ приборъ такъ, чтобы онъ упирался въ окружность пластинками *АВ* и *БД*, а линейка *БК* лежала бы вплотную на плоскости круга. Затѣмъ, зачерчиваютъ по ребру *БК* линiю, которая должна пройти черезъ центръ круга. Если произвести подобное зачерчиванiе 2 раза, то точка пересѣченiя линiй и будетъ искомый центръ. Понятио, что построенiе будетъ точно только въ томъ случаѣ, если этотъ приборъ вѣренъ, т. е , если лнiя *БК* дѣйствительно дѣлитъ $\angle$ *АБД* пополамъ. Въ провѣркѣ этого свойства ребра *КВ* и состоитъ провѣрка прибора.

62. Измѣренiе поверхности и объема цилиндра. Такъ какъ всякiй цилиндръ можно разсматривать, какъ призму, имѣющую безчисленное множество сторонъ, поэтому измѣренiе поверхности и объема цилиндра будетъ такое же, какъ и у призмы, а именно: *боковая поверхность цилиндра равняется окружности основанiя, умноженной на производящую, или* $п = с \times м$. Чтобы получить полную поверхность цилиндра, то надо къ боковой его поверхности прибавить площади обоихъ круговъ основанiй. Полная поверхность цилиндра выражается формулой: $П = (с \times м) + (2 \times \pi \times р^2)$.

Объемъ цилиндра равняется площади основанiя, умноженной на высоту, или $О = А \times к$.

Если развернуть (чер. 129) поверхность цилиндра, то получимъ два круга основанiя и прямоугольникъ (боковая его поверхность), у котораго основанiе *АВ* будетъ равно длинѣ окружности основанiя цилиндра, а высота *АВ* равна длинѣ производящей.



Чер. 129

Примѣръ 1. *Вычислить боковую и полную поверхность цилиндра, если радiусъ его основанiя — 9 верш., а образующая — 14 верш.*

Рѣшенiе. Окружность основанiя даннаго цилиндра $= 2 \times \pi \times р = 2 \times {}^{22}/_7 \times 9 = 56^4/_7$ верш.; боковая его поверхность $= 56^4/_7 \times 14 = 792$ квадр. верш. Площадь основанiя $= \pi \times р^2 = {}^{22}/_7 \times 9^2 =$

$^{22}/_7 \times 81 = 254^4/_7$ квадрат. верш.; сумма площадей обоихъ основаній $= 254^4/_7 \times 2 = 509^1/_7$ квадр. вершк.; полная поверхность даннаго цилиндра $= 509^1/_7 + 792 = 1301^1/_7$ квадр. верш.

2. ***Каковъ долженъ быть радіусъ цилиндра, если его боковая поверхность = 3080 квадр. дюйм., а высота его 4 ф. 1 д.***

Рѣшеніе. Высота цилиндра = 4 ф. 1 д. = 49 дюйм.: окружность его основанія $= 3080 : 49 = 62^6/_7$ дюйм.; радіусъ основанія $= 62^6/_7 : 2\pi = 62^6/_7 : {}^{44}/_7 = 10$ дюйм.

3. ***Вычислить объемъ цилиндра, если радіусъ его основанія = 1 саж. 1 фут. 9 дюйм., а высота его = 3 саж. 4 фута.***

Рѣшеніе. Радіусъ даннаго цилиндра = 1 саж 1 фут. 9 дюйм. = 105 дюйм.; высота его 3 саж 4 фута = 300 дюйм., площадь основанія $= \pi \times \rho^2 = {}^{22}/_7 \times 105^2 = {}^{22}/_7 \times 11025 = 34650$ кв. дюйм. Объемъ даннаго цилиндра $= 34650 \times 300 = 10395000$ куб. дюйм. = 17 куб. саж. 184 куб. фута и 1080 куб. дюйм.

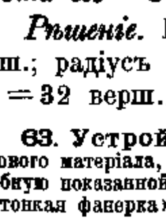
4. ***Каковъ долженъ быть радіусъ основанія цилиндра, если высота его = 8 верш., а объемъ его — 804⁴/₇ куб верш.?***

Рѣшеніе. Площадь основанія цилиндра $= 804^4/_7 : 8 = 100^4/_7$ кв. верш.; радіусъ его основанія въ квадратѣ, $\rho^2 = 100^4/_7 : \pi = 100^4/_7 : {}^{22}/_7 = 32$ верш., радіусъ основанія, $\rho = \sqrt{32} =$ около $5^3/_5$ верш.

63. Устройство цилиндровъ. Чтобы устроить цилиндръ изъ какого-либо листового матеріала, то для этого сначала по даннымъ размѣрамъ чертятъ сѣтку цилиндра, подобную показанной на чертежѣ 129 и затѣмъ, вырѣзавъ ее, склеиваютъ (если это папка или тонкая фанерка), или спаиваютъ (если данъ металлъ), основаніе цилиндра съ боковой его поверхностью, постепенно сгибая послѣднюю по окружностямъ основаній При устройствѣ большихъ металлическихъ цилиндровъ: паровыхъ котловъ, бассейновъ и т. п., конечно, всю поверхность приходится дѣлать изъ отдѣльныхъ листовъ металла, выгибая каждый для боковой поверхности по модели, и затѣмъ соединяютъ ихъ вмѣстѣ (склепываютъ).

Полные цилиндры изъ дерева, металла и кости дѣлаются преимущественно при помощи токарнаго станка. Если же приходится дѣлать цилиндръ безъ станка, какъ напримѣръ изъ камня, то сначала изъ даннаго матеріала выпиливаютъ данной длины квадратную призму; затѣмъ, равномѣрно спиливаютъ или срѣзаютъ или скалываютъ ея боковые двугранные углы, и такимъ образомъ производятъ восьмигранную призму; далѣе, спиливаютъ двугранные углы у этой призмы и обращаютъ ее въ 16-гранную и т. д. Такъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не получатъ ровной кривой цилиндрической поверхности.

При устройствѣ полныхъ цилиндровъ во все время работы наблюдаютъ, чтобы во 1-хъ, не было просвѣта между ребромъ линейки, приставленной къ боковой поверхности по направленію образующей линіи, и самой поверхностью, и во 2-хъ, чтобы діаметръ цилиндра былъ бы даннаго размѣра для чего весьма часто прикладываютъ кронциркуль или нутромѣръ къ боковой поверхности цилиндра по направленію плоскости, перпендикулярной къ оси цилиндра Основанія для прямыхъ цилиндровъ устраиваютъ подъ наугольникъ къ боковой поверхности

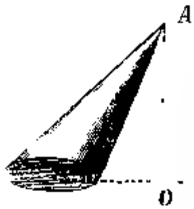


Чер 130.

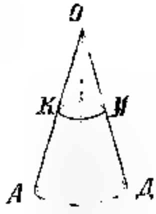
64. Конусъ и его сѣченія. Если мы возьмемъ прямоугольный $\triangle$ *АБД* и станемъ вращать его около катета *АБ*, какъ около оси (чер. 130), до тѣхъ поръ, пока гипотенуза *АД* не придетъ на

прежнее мѣсто, то мы получимъ ***прямой конусъ.*** Съ одной стороны конусъ будетъ ограниченъ кругомъ, а съ остальныхъ—кривою поверхностью, сходящеюся въ одну точку *А*. Эта точка конуса *А* называется ***вершиною его,*** а кругъ — ***основанiемъ*** конуса. Прямая *АВ*, соединяющая вершину конуса съ кругомъ основанiя, называется ***осью*** конуса. Ось *АБ* прямого конуса будетъ и его ***высотой.*** Линiя *АД*, гипотенуза прямоугольнаго △ *АБД*, производящая своимъ движенiемъ боковую поверхность конуса, называется ***образующею или производящею*** конуса. Какъ видно изъ чертежа, образующая линiя *ДА* прямого конуса и радiусъ основанiя *ВД*, проведенный къ ней, образуютъ въ конусѣ извѣстный опредѣленный уголъ *АДБ*, опредѣляющiй вполнѣ направленiе боковой поверхности конуса.

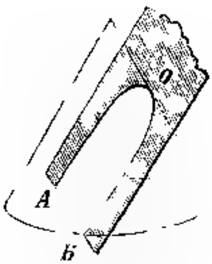
Конусъ можетъ быть и наклоннымъ (чер. 131 . Тогда его высота будетъ перпендикуляръ *АО*, опущенный изъ вершины конуса *А* на плоскость его основанiя. Сѣченiе конуса плоскостью *КМ* (чер. 132) параллельною основанiю, будетъ ***кругъ***, а сѣченiе его плоскостью перпендикулярной къ основанiю и проходящей черезъ ось конуса (чер. 132) будетъ ***равнобедренный треугольникъ*** *АОД*. Сѣченiе конуса плоскостью (чер. 133), параллельною производящей линiи, даетъ кривую линiю, ***параболу*** *АОБ*. Сѣченiе конуса плоскостью, параллельною оси (чер. 134), даетъ въ сѣченiи одну



Чер 131



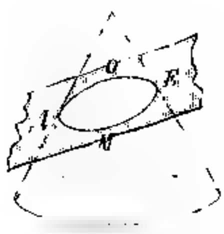
Чер. 132.



Чер 133



Чер 134



Чер. 135

вѣтвь кривой линiи ***гиперболы*** *МНК*; сѣченiе же конуса плоскостью, пересѣкающею всѣ образующiя линiи и наклонною къ основанiю, даетъ въ сѣченiи кривую ***эллипсъ*** *ЕМДО* (чер. 135).

Если мы возьмемъ правильную пирамиду съ безчисленнымъ

множествомъ боковыхъ граней, то ее можно принимать за прямой конусъ, а потому и обратно, ***всякій прямой конусъ можно разсматривать за правильную пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ боковыхъ граней***, у которой основаніе—правильный многоугольникъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ; периметръ этого многоугольника — окружность основанія конуса, а боковое ребро этой пирамиды — производящая конуса.

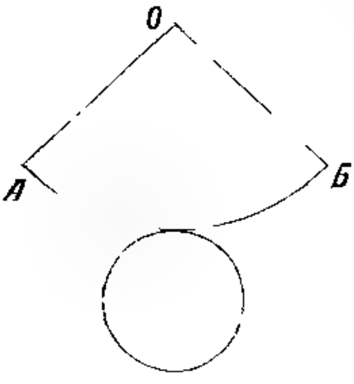
Форму конуса имѣютъ множество предметовъ, встрѣчающихся въ жизни: воронки, кучи песку или щебня, крыши нѣкоторыхъ круглыхъ зданій, и т. п.

65. Измѣреніе поверхности и объема прямого конуса. Такъ какъ всякій прямой конусъ можно разсматривать, какъ пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ; поэтому измѣреніе поверхности и объема конуса будетъ такое же, какъ и правильной пирамиды, а именно: ***боковая поверхность конуса равняется окружности основанія, умноженной на половину производящей, или*** $n = c \times \frac{м}{2}$.

Чтобы получить полную поверхность конуса, для этого къ боковой поверхности нужно прибавить площадь основанія. Полная поверхность конуса выражается такъ $П = \frac{c \times м}{2} + (\pi \times p^2)$.

Объемъ конуса равняется площади основанія, умноженной на $^1/_3$ ***высоты, или*** $О = А \times \frac{к}{3}$.

Если развернуть поверхность конуса (чер. 136), то получимъ: кругъ и секторъ, у котораго дуга $АБ$ равна окружности основанія конуса, а радіусъ $ОА$ равенъ производящей конуса



Чер. 136.

Примѣръ 1. ***Вычислить боковую и полную поверхность прямого конуса, если радіусъ его основанія = 8 верш., а образующая его = 21 верш.?***

Рѣшеніе. Окружность основанія даннаго конуса $= 2 \times \pi \times p = 2 \times {}^{22}/_7 \times 8 = 50^2/_7$ вершка; боковая его поверхность $= (50^2/_7 \times 21) : 2 = 528$ квадр. вершк.; площадь основанія его $= \pi \times p^2 = {}^{22}/_7 \times 8^2 = {}^{22}/_7 \times 64 = 201^1/_7$ квадр. дюйма. Полная поверхность даннаго конуса $= 201^1/_7 + 528 = 729^1/_7$ квадр. дюйма.

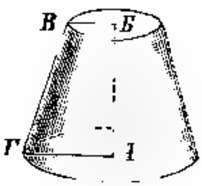
2. ***Вычислить объемъ прямого конуса, если радіусъ его основанія = 1 ф. 9 дюйм., а его высота = 2 ф. 6 дюйм.***

Рѣшеніе. Радіусъ основанія даннаго конуса = 1 ф. 9 дюйм. = 21 дюйм.; площадь основанія даннаго конуса $= \pi \times p^2 = {}^{22}/_7 \times 21^2 = {}^{22}/_7 \times 441 = 1386$ квад. дюйм.; высота конуса = 2 ф. 6 д. = 30 дюйм. Объемъ конуса $=(1386 \times 30):3 = 13860$ куб. дюйм.

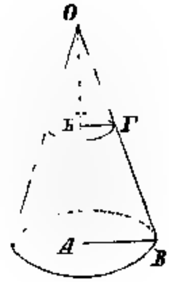
66. Устройство конусовъ. Чтобы устроить конусъ изъ листоваго матеріала, то сначала чертятъ сѣтку его по даннымъ размѣрамъ, а затѣмъ, выгибая его боковую поверхность, соединяютъ ее съ основаніемъ.

Полные конусы изъ другого какого-либо матеріала дѣлаются или при помощи токарнаго станка, или же, какъ напримѣръ, изъ камня, постепеннымъ производствомъ ... поверхности изъ многогранной поверхности, т. е. сначала дѣлаютъ многогранную пирамиду, а затѣмъ, сглаживая постепенно двугранные углы этой пирамиды, обращаютъ ее въ конусъ. Во все время работы при этомъ наблюдаютъ во 1-хъ, чтобы не было просвѣта между ребромъ линейки, приставленной къ боковой поверхности конуса, и самой поверхностью; во 2-хъ, чтобы уголъ, составленный изъ образующей и радіусомъ основанія, проведеннымъ къ ней, равнялся бы данному углу, и въ 3-хъ, чтобы діаметръ основанія конуса былъ бы даннаго размѣра.

67. Прямой усѣченный конусъ. Прямой усѣченный конусъ получается отъ пересѣченія конуса плоскостью, параллельной основанію (чер. 137). Круги *А* и *Б* усѣченнаго конуса называются *основаніями*, а линія *АБ*, т. е. линія, соединяющая центры обоихъ основаній,—его *высотою*. Усѣченный прямой конусъ можетъ быть образованъ вращеніемъ трапеціи *АБГВ* (чер. 138), у которой одна изъ непараллельныхъ сторонъ *АБ* перпендикулярна къ основаніямъ. Вращеніе производится около этой стороны *АБ*. Другая непараллельная сторона трапеціи *ВГ* при движеніи образуетъ боковую поверхность усѣченнаго конуса, а потому и называется его *образующей* линіей.



Чер 137.



Чер. 138.

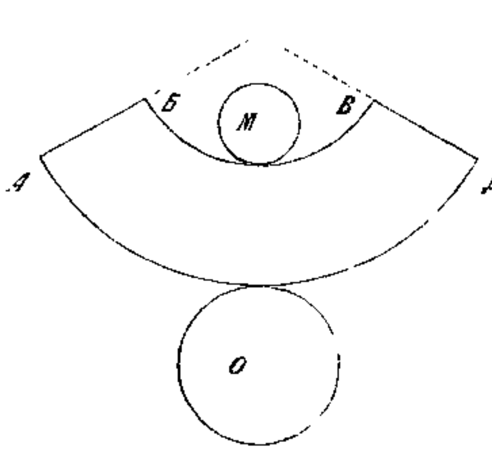
Замѣтимъ слѣдующее свойство усѣченнаго конуса (чер. 138). Если мы сравнимъ радіусы *АВ* и *БГ* основаній прямого усѣченнаго параллельно основанію конуса и высоты: *АО* цѣлаго конуса и высоту *БО* отсѣченнаго конуса, то найдемъ, что всегда высота *АО* цѣлаго конуса болѣе высоты *БО* отсѣченнаго конуса, во столько разъ, во сколько разъ радіусъ *АВ* нижняго основанія усѣченнаго конуса болѣе радіуса *БГ* верхняго основанія усѣченнаго конуса, или иначе говоря, *разстоянія основаній усѣченнаго конуса отъ вершины относятся между собою, какъ ихъ радіусы;* такъ, напримѣръ, если *АВ* болѣе *БГ* въ 2, 3, 4, $2^1/_2$ и т. д разъ, то и *АО* болѣе *БО* тоже въ 2, 3, 4, $2^1/_2$ и т. д. раза.

68. Измѣреніе поверхности и объема прямого усѣченнаго конуса. Такъ какъ всякій усѣченный конусъ можно разсматривать, какъ усѣченную пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ, то поэтому измѣреніе поверхности и объема усѣченнаго конуса будетъ такое-же, какъ и усѣченной пирамиды, а именно: ***боковая поверхность прямого усѣченнаго конуса равняется полусуммѣ окружностей его основаній, умноженной на производящую, или*** $n = \frac{C+c}{2} \times м$. Есть и другое выраженіе, а именно: ***боковая поверхность прямого усѣченнаго конуса равняется окружности срединнаго сѣченія, умноженной на производящую,*** или $n = m \times м$, гдѣ буквою m выражена длина окружности срединнаго сѣченія

Чтобы получить полную поверхность усѣченнаго конуса, то нужно къ боковой поверхности прибавить сумму площадей его основаній. Полная поверхность усѣченнаго конуса выражается такъ: $П = \left(\frac{C+c}{2} \times м\right) + (\pi \times P^2) + (\pi \times p^2)$.

Объемъ усѣченнаго конуса равняется разности объемовъ полнаго конуса и отсѣченнаго.

Если развернуть поверхность усѣченнаго конуса (черт. 139), то получимъ два круга O и M основанія конуса и фигуру $АБВД$, ограниченную съ двухъ сторонъ дугами, изъ которыхъ дуга $АД$ по длинѣ равна длинѣ окружности нижняго основанія O, а дуга $БВ$ равна окружности верхняго основанія M; съ другихъ же сторонъ эта фигура ограничена прямыми $АБ$ и $ВД$, которыя равны образующей конусѣ.



Чер 139

Примѣры: 1. ***Вычислить боковую и полную поверхность усѣченнаго конуса, если радіусъ верхняго его основанія = $3^1/_2$ дюйм., радіусъ нижняго его основанія = 7 дюйм., а образующая его — 6 дюймамъ.***

Рѣшеніе. Окружность верхняго основанія даннаго усѣченнаго конуса $= 2 \times \pi \times p = 2 \times {}^{22}/_7 \times (3^1/_2) = 22$ дюйм.; окружность нижняго его основанія $= 2 \times \pi \times P = 2 \times {}^{22}/_7 \times 7 = 44$ дюйм.; сумма

окружностей обоихъ его основаній $= 22 + 44 = 66$ дюйм. Боковая поверхность $= (66 \times 6) : 2 = 198$ квадр. дюйм.; площадь нижняго основанія $= \pi \times P^2 = {}^{22}/_7 \times 7^2 = {}^{22}/_7 \times 49 = 154$ квадр. дюйм.; площадь верхняго основанія конуса $= \pi \times p^2 = {}^{22}/_7 \times (3^1/_2)^2 = = {}^{22}/_7 \times {}^{49}/_4 = 38^1/_2$ квадр дюйма; полная поверхность даннаго усѣченнаго конуса $= 154 + 38^1/_2 + 198 = 390^1/_2$ квадр. дюйм.

Примѣръ 2. *Вычислить боковую поверхность усѣченнаго конуса, если радіусъ срединнаго сѣченія = 21 сантим., а образующая = 40 сант.*

Рѣшеніе. Окружность срединнаго сѣченія даннаго конуса $= 2 \times \pi \times p = 2 \times {}^{22}/_7 \times 21 = 132$ сант. Боковая поверхность его $= 132 \times 40 = 5280$ квадр. сантиметр

Примѣръ 3. *Вычислить объемъ усѣченнаго конуса, если радіусъ нижняго его основанія = 7 сантиметр., радіусъ верхняго его основанія = 4 сант., а высота его = 9 сантим.*

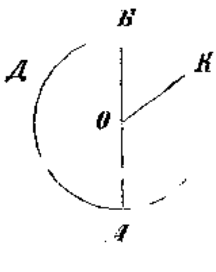
Рѣшеніе. Дополнимъ усѣченный конусъ до цѣлаго (черт. 138) и найдемъ сначала высоты конусовъ: полнаго и отсѣченнаго. Такъ какъ намъ извѣстно, что высота цѣлаго конуса во столько разъ больше высоты отсѣченнаго конуса, во сколько разъ радіусъ основанія полнаго конуса болѣе радіуса основанія отсѣченнаго конуса, то, значитъ, высота AO болѣе высоты $БO$ во столько разъ, во сколько 7 болѣе 4. Это отношеніе высотъ нужно понимать такъ: въ высотѣ AO содержится 7 частей, а въ высотѣ $БO$ 4 такихъ-же части; значитъ, высота даннаго усѣченнаго конуса $AБ = AO - БO$, и въ ней заключается $7 - 4 = 3$ части, въ которыхъ по заданію содержится 9 сантим. Итакъ, мы нашли, что въ 3-хъ частяхъ высоты даннаго усѣченнаго конуса заключается 9 сантиметр.; значитъ, въ одной ея части содержится $9 : 3 = 3$ сантим; а такъ какъ въ высотѣ цѣлаго конуса AO содержится такихъ-же частей 7, а въ высотѣ $БO$ усѣченнаго конуса ихъ содержится только 4, то, значитъ, высота полнаго конуса $AO = 3 \times 7 = 21$ сантим., а высота отсѣченнаго конуса $БO = 3 \times 4 = 12$ сантим. Теперь, найдя высоты, мы вычислимъ объемы конусовъ. Площадь основанія полнаго конуса $= \pi \times P^2 = {}^{22}/_7 \times 7^2 = {}^{22}/_7 \times 49 = 154$ квадр сант.; объемъ полнаго конуса $= (154 \times 21) : 3 = 1078$ куб. сант. Площадь основанія отсѣченнаго конуса $= \pi \times p^2 = {}^{22}/_7 \times 4^2 = {}^{22}/_7 \times 16 = 50^2/_7$ квадр. сант. Объемъ отсѣченнаго конуса $= (50^2/_7 \times 12) : 3 = 201^1/_7$ куб. сант. Объемъ даннаго усѣченнаго конуса $= 1078$ куб. сант. $- 201^1/_7$ куб. сант. $= 876^6/_7$ куб. сантиметр.

---

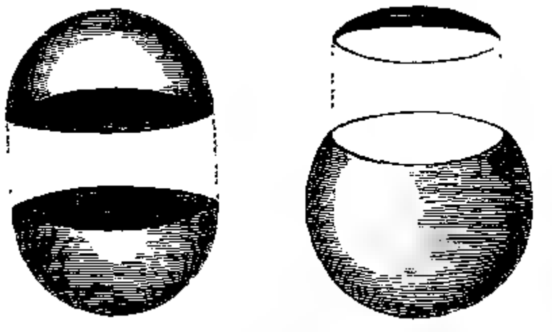
69. Устройство усѣченныхъ конусовъ. Устройство усѣченныхъ конусовъ изъ листового матеріала и усѣченныхъ конусовъ полныхъ при помощи токарнаго станка производится точно также, какъ и устройство цилиндровъ и цѣлыхъ конусовъ.

Устройство-же полнаго прямого правильно усѣченнаго конуса изъ камня, дерева и т. п. матеріала производится такъ: сначала дѣлаютъ на матеріалѣ плоскость и на ней проводятъ опредѣленнымъ радіусомъ окружность нижняго основанія конуса. Затѣмъ, начинаютъ постепенно производить боковую поверхность, наблюдая, чтобы образующая ея съ радіусомъ основанія образовала бы данный уголъ. Наконецъ, намѣтивъ отъ окружности нижняго основанія по образующимъ данныя разстоянія, находятъ нѣсколько точекъ, по которымъ и проводятъ верхнюю грань основанія.

70. Шаръ. Если станемъ вращать (чер. 140) полукругъ *АДБ* около его діаметра *АБ*, то получимъ шаръ. Шаръ ограниченъ такой кривой поверхностью, всѣ точки которой находятся на одинаковомъ разстояніи отъ одной внутренней точки *О*, называемой центромъ. Разстояніе центра шара отъ его поверхности, т. е. линіи: *АО, ОК* и другія называются ***радіусами шара***. Продолживъ радіусъ *АО* до другой точки поверхности, получимъ ***діаметръ шара АБ. Всякое сѣченіе шара плоскостью даетъ кругъ.*** Чѣмъ сѣченіе будетъ сдѣлано ближе къ центру, тѣмъ будетъ и кругъ сѣченія больше, и обратно. Сѣченіе шара черезъ центръ его даетъ ***большой кругъ шара*** и, понятно, что радіусъ этого круга будетъ равенъ радіусу шара, и что ***всѣ большіе круги шара равны между собою***. Всякій большой кругъ (чер. 141) шара дѣлитъ его на два равныхъ полушарія. Всякій другой кругъ сѣченіе шара дѣлитъ его на два неравныхъ шаровыхъ сегмента. Всякій діаметръ шара можетъ быть принятъ ***за ось*** шара. Форму шара имѣютъ весьма многіе предметы.



Чер. 140.



Чер. 141

71. Измѣреніе поверхности и объема шара. Поверхность шара нельзя развернуть на плоскость, а значитъ, нельзя и начертить сѣтки шара. Чтобы узнать поверхность какого либо шара, мы должны найти площадь его большаго круга и увеличить ее въ 4 раза. Итакъ, ***поверхность шара равняется четыремъ площадямъ его большого круга***. Если мы поверхность шара умножимъ на $^1/_3$ его радіуса, то найдемъ его объемъ. Итакъ, ***объемъ шара равняется***

его поверхности, умноженной на $^1/_3$ его радіуса. Точныя доказательства вѣрности приведенныхъ истинъ относительно измѣренія поверхности и объема шара приводятся въ подробныхъ курсахъ науки геометріи. Разсматривая выраженія поверлиости и объема шара, мы видимъ, что для измѣренія ихъ нужно знать только радіусъ шара. Если мы изобразимъ радіусъ шара буквою p, то его поверхность выразится такъ: $4 \times \pi \times p^2$, а его объемъ $4 \times \pi \times p^2 \times {}^1/_3\, p$, или ${}^4/_3 \times \pi \times p^3$.

Примѣръ 1. *Вычислить поверхность шара, если его радіусъ = 1 арш. 5 верш.*

Рѣшеніе. Радіусъ даннаго шара = 1 арш. 5 верш. = 21 верш. Поверхность шара $= 4 \times \pi \times p^2 = 4 \times {}^{22}/_7 \times 21^2 = 4 \times {}^{22}/_7 : 441 = 5544$ квадр. верш. = 21 кв. арш. и 168 кв. верш.

2. *Вычислить полную поверхность полушарія, если окружность его сѣченія* = 88 дюйм.

Рѣшеніе. Окружность сѣченія $= 2 \times \pi \times p = 88$ д., откуда $p = 88 : 2\pi = 88 : {}^{44}/_7 = 14$ д.: если поверхность шара $= 4 \times \pi \times p^2$, то, значитъ, поверхность полушарія $= (4 \times \pi \times p^2) : 2 = 2 \times \pi \times p^2$, а полная поверхность полушарія $= (2 \times \pi \times p^2) + (\pi \times p^2)$ (площадь сѣченія) $= 3 \times \pi \times p^2 = 3 \times {}^{22}/_7 \times 14^2 = 3 \times {}^{22}/_7 \times 196 = 1848$ кв. дюймовъ.

3. *Вычислить объемъ шара, если его радіусъ = 8 сантиметр.*

Рѣшеніе. Объемъ шара $= {}^4/_3 \times \pi \times p^3 = {}^4/_3 \times {}^{22}/_7 \times 8^3 = {}^4/_3 \times {}^{22}/_7 \times 512 = 2145^{11}/_{21}$ куб. сант.

4. *Вычислить объемъ полушарія, если его полная поверхность = 462 кв. дюйм.*

Рѣшеніе. Такъ какъ полная поверхность полушарія состоитъ изъ площади сѣченія, сложенной съ половиною поверхности всего шара, то значитъ 462 квад. дюйм. $= \pi \times p^2 + {}^1/_2 (4 \times \pi \times p^2) = \pi \times p^2 + 2 \times \pi \times p^2 = 3 \times \pi \times p^2$. Если мы теперь 462 квадр. дюйм. раздѣлимъ на 3π, то найдемъ чему $= p^2$; $p^2 = 462 : 3\pi = 462 : {}^{66}/_7 = 49$, откуда $p = \sqrt{49} = 7$ дюйм. Итакъ, радіусъ даннаго полушарія = 7 дюйм. Объемъ всего шара $= {}^4/_3 \times \pi \times p^3 = {}^4/_3 \times {}^{22}/_7 \cdot p^3 = {}^4/_3 \times {}^{22}/_7 \times 343 = 1437^1/_3$ куб. дюйм. Объемъ даннаго полушарія $= 1437^1/_3 : 2 = 718^2/_3$ куб. дюйма.

72. Отношеніе поверхностей и объемовъ шаровъ. Если мы будемъ вычислять поверхности различныхъ размѣровъ шаровъ и сравнивать ихъ между собою, то мы найдемъ, что *поверхность одного шара всегда больше или меньше поверхности другого шара во столько разъ, во сколько радіусъ въ квадратѣ перваго шара больше или меньше радіуса въ квадратѣ другого шара;* такъ, напримѣръ, если радіусъ одного шара будетъ 6 дюймовъ, а другой 2

дюйма, то, вычисливъ ихъ поверхность, мы узнаемъ, что поверхность перваго больше поверхности втораго будетъ во столько разъ, во сколько 6^2 больше 2^2, или $36 : 4 =$ въ 9 разъ.

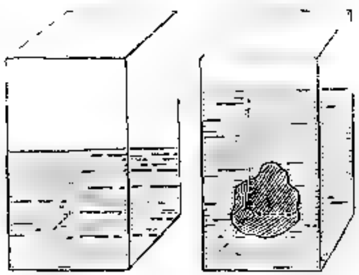
Если мы будемъ вычислять объемы различныхъ шаровъ и сравнивать ихъ между собою, то мы найдемъ, что *объемъ одного шара всегда больше или меньше объема другого шара во столько разъ, во сколько радіусъ въ кубѣ одного шара болѣе или менѣе радіуса въ кубѣ другого шара*; *такъ, напримѣръ, если радіусъ* одного шара — 6 дюймамъ, а другой 3 дюймамъ, то, вычисливъ ихъ объемы и сравнивъ ихъ, мы узнаемъ, что объемъ перваго шара больше объема втораго будетъ во столько разъ, во сколько 6^3 больше 3^3, или $216 : 27$ — въ 8 разъ.

73. **Устройство шаровъ.** Тѣла съ правильною шаровою поверхностью производятся исключительно только при помощи токарнаго станка.

74. Цилиндръ, конусъ и шаръ называются тѣлами вращенія. Тѣла вращенія могутъ имѣть и другую какую-либо форму. Весьма часто въ практикѣ кромѣ шара, цилиндра и конуса встрѣчается тѣло, полученное отъ вращенія полуэллипса (чер. 142). Это тѣло называется *эллипсоидомъ*.



Чер 142.



Чер 143

75. Вычисленіе объема неправильныхъ и сложныхъ тѣлъ. Если тѣло имѣетъ неправильный видъ, то (чер. 143) при размѣрахъ, не слишкомъ большихъ, объемъ его можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ: кладемъ измѣряемое тѣло въ круглый или четыреугольный сосудъ и наливаемъ на него воды, такъ чтобы оно ею покрылось; затѣмъ вынимаемъ тѣло и замѣчаемъ, на сколько уровень воды въ сосудѣ чрезъ это понизился. Вычисляя объемъ, который содержится между первымъ и вторыми уровнями воды въ сосудѣ, находимъ объемъ опредѣляемаго тѣла. Съ этою цѣлію можно брать простую стеклянную круглую банку, измѣривъ окружность которой, можно опредѣлить и площадь ея сѣченія, а слѣдовательно, и объемъ столба

жидкости между уровнями, т. е. объемъ положениаго въ нее тѣла. Если тѣло легче воды или растворяется въ ней, то можно вмѣсто воды употреблять и мелкій песокъ.

Въ практикѣ весьма часто встрѣчаются сложныя тѣла, состоящія изъ различныхъ соединеній всѣхъ вышеописанныхъ тѣлъ: призмъ, пирамидъ, цилиндровъ и т. д. Для вычисленія ихъ поверхностей и объемовъ поступаютъ такимъ образомъ: ихъ разбиваютъ на отдѣльныя простыя тѣла и, вычисляя по найденнымъ размѣрамъ объемы этихъ тѣлъ или поверхностей, находятъ, затѣмъ, сумму полученныхъ чиселъ, которая и дастъ намъ объемъ или поверхность даннаго сложнаго тѣла.

Если сложный данный предметъ имѣетъ пустоту, то вычисляютъ объемы этихъ пустотъ, складываютъ полученныя числа и найденную сумму объемовъ пустотъ вычитаютъ изъ общей суммы объема тѣла; такъ, напримѣръ, чтобы найти объемъ пустого чугуннаго цилиндра, сначала вычисляютъ объемъ всего цилиндра; затѣмъ вычисляютъ объемъ цилиндрической пустоты, и наконецъ, вычитаютъ 2-й объемъ изъ перваго. Полученная разность даетъ объемъ даннаго пустого чугуннаго цилиндра.

76. Измѣреніе объема жидкостей. Мензурка. Иногда объемомъ полаго цилиндра или конуса пользуются для измѣренія объема жидкостей. Для этого берутъ стеклянный цилиндрическій (чер. 144) или коническій (чер. 145) сосудъ и на его поверхности обозначаютъ по высотѣ дѣленія, соотвѣтствующія количеству кубическихъ дюймовъ или другихъ какихъ либо кубическихъ мѣръ. Эти дѣленія, конечно, намѣчаютъ въ строгомъ соотвѣтствіи дѣйствительнымъ объемамъ налитой въ нихъ жидкости. Такой приборъ, который употребляется для измѣренія жидкостей по объему - называется мензуркой. Цифры, поставленныя у дѣленій, означаютъ количество кубическихъ мѣръ объема. Узнаютъ при помощи этого прибора объемъ жидкости такъ: наливаютъ жидкость въ сосудъ и смотрятъ, на какомъ дѣленіи стоитъ уровень жидкости. Цифра этого дѣленія и покажетъ количество кубическихъ мѣръ ея. При помощи этого при-



Чер. 144



Чер. 145

бора очень удобно отмѣрять даниое количество жидкости по объему, а потому онъ и употребляется очень часто въ практикѣ. Иногда дѣленія мензурки дѣлаютъ не по объему жидкости, а по ея вѣсу; такъ, напримѣръ, по фунтамъ чистой воды и т. п.

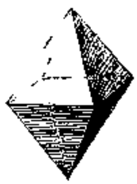
77. Правильные многогранники.

Кромѣ разсмотрѣнныхъ тѣлъ, нерѣдко въ практикѣ встрѣчаются такъ называемые правильные многогранники. *Правильнымъ многогранникомъ называется такой, у котораго всѣ грани правильные многоугольники и равны между собою, и всѣ многогранные углы ихъ также равны между собою*, напримѣръ, кубъ. Правильныхъ многогранниковъ только 5.

Правильный четырегранникъ (тетраедръ) ограниченъ четырьмя равносторонними треугольниками (чер. 146).



Чер. 146.



Чер. 147.



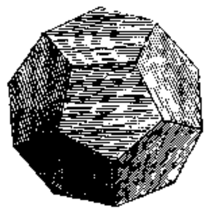
Чер. 148.

Правильный восьмигранникъ (октаедръ) ограниченъ восемью равносторонними треугольниками (чер. 147)

Правильный двадцатигранникъ (икосаедръ) ограниченъ 20-ю равносторонними треугольниками (чер. 148).



Чер. 149.



Чер 150.

Правильный шестигранникъ (чер.149) (эксаедръ) ограниченъ шестью квадратами.

Правильный двѣнадцатигранникъ (додекаедръ) (черт. 150) ограниченъ 12-ю правильными пятиугольниками.

Задачи и упражненія.

1) Вычислить боковую и полную поверхность и объемъ прямаго параллелепипеда съ квадратнымъ основаніемъ, если ребро основанія = 8, а высота 12 вершк.

2) Ребро основанія правильной квадратной пирамиды - 3 фут., а ея апоѳема 8 фут. Опредѣлить боковую и полную поверхность

3) Вычислить полную поверхность и объемъ цилиндра, если радіусъ его основанія равенъ 7 сантиметрамъ, а высота 12 сантим.

4) Вычислить поверхность правильной усѣченной четыреугольной пирамиды, ребра основаній которой равны 3 и 5 дюйм., а апоѳема 4 дюйм.

5) Въ конусѣ даны: радіусъ основанія 28 дюйм., высота 45 сантиметровъ, а образующая 53 сантим. Найти боковую и полную поверхность и объемъ.

6) Вычислить поверхность и объемъ шара, если его радіусъ равенъ 14 вершк.

7) Боковая поверхность цилиндра 2 квадр. фут. 64 квадр. дюйм., а образующая его 8 дюйм. Опредѣлить радіусъ основанія цилиндра.

8) Вычислить боковую поверхность правильной прямой пятиугольной призмы, если ребра ея основанія - 8 сантим. и высота 12 сантим.

9) Ребра основанія правильной квадратной усѣченной пирамиды равны 8 и 6 вершкамъ, а ея высота - 10 вершк. Вычислить ея объемъ.

10) Какой величины нужно взять радіусъ основанія конуса, имѣющаго высоту въ 12 дюйм., чтобы его объемъ былъ = 616 кубическ дюйм.?

11) Вычислить объемъ правильной пирамиды, площадь основанія которой 28 квадр. дюйм., а высота 12 дюйм.

12) Цилиндрическая жестянка имѣетъ 1 футъ 6 дюйм. въ вышину и 14 дюйм. въ поперечникѣ. Какъ великъ ея объемъ?

13) Вычислить боковую поверхность правильной пятигранной усѣченной пирамиды, ребра основаній которой равны 7 и 5 дюйм., а апоѳема 4 дюймамъ.

14) Поверхность шара = 616 квадратн. сантим. Найти его радіусъ.

Отдѣлъ V.

Вычисленіе вѣса и объема неправильныхъ многогранниковъ. Подобныя тѣла.

78. Вычисленіе вѣса тѣлъ. Возьмемъ ящикъ, сдѣланный изъ жести или изъ другого листового матеріала *), и притомъ такой, чтобы онъ имѣлъ видъ прямоугольнаго параллелепипеда, котораго высота = 1 дюйму, а основаніе было бы квадратъ, имѣющій сторону = 5 дюйм. Объемъ этого ящика будетъ равенъ $5 \times 5 \times 1 = 25$ куб. дюймовъ. Положивъ этотъ ящикъ на вѣсы, уравновѣсимъ его гирями, и затѣмъ, нальемъ въ него, до самаго края, чистой перегнанной воды и вновь уравновѣсимъ. Тогда мы увидимъ, что намъ придется прибавить на другую чашку вѣсовъ гирю въ 1 фунтъ, значитъ, налитая въ ящикъ вода, мѣрою въ *25 куб. дюймовъ, вѣситъ ровно 1 фунтъ*; отсюда — *1 кубич. дюймъ воды вѣситъ* $^1/_{25}$ *фунта*, а кубическій футъ воды вѣситъ $^1/_{25} \times 1728 = 69^3/_{25}$ фунта. На основаніи вышеизложеннаго, можно сказать, что разъ извѣстенъ объемъ воды, то легко ужъ опредѣлить и вѣсъ ея. Если, напримѣръ, вмѣстимость боченка = 5 куб. ф., то въ него можетъ войти $69^3/_{25} \times 5 = 345^3/_{25}$ ф. воды, если въ какомъ-либо сосудѣ налито 150 куб. дюйм. воды, то такой объемъ воды вѣситъ $^1/_{25} \times 150 = 6$ фунт. и т. п.

Вообще, если объемъ воды данъ въ кубич. футахъ, то его надо умножить на $69^3/_{25}$; а если въ кубич. дюймахъ, то на $^1/_{25}$, и тогда получимъ вѣсъ въ фунтахъ. Если же объемъ данъ въ какихъ-нибудь другихъ мѣрахъ, напр. въ куб. аршинахъ, саженяхъ и т. п., то сначала нужно обратить эти мѣры въ кубич. футы или дюймы, а потомъ сдѣлать соотвѣтствующее вычисленіе.

Примѣръ 1. *Узнать, сколько пудовъ воды помѣстится въ бассейнѣ, имѣющемъ видъ прямоугольнаго параллелепипеда, котораго длина $1^1/_2$ аршина, ширина 1 аршинъ, а высота 2 аршина.*

Рѣшеніе. Замѣнивъ данныя измѣренія дюймами, получимъ: $1^1/_2$ арш. = 42 д., 1 арш. = 28 д. и 2 арш. = 56 д. Далѣе, находимъ объемъ бассейна: $42 \times 28 \times 56 = 65856$. Такой объемъ воды вѣситъ = $^1/_{25} \times 65856 = 2634^6/_{25}$ фунта.

---

*) Можно сдѣлать такой ящикъ изъ папки и покрыть его сургучнымъ лакомъ, т. е. растворомъ сургуча въ винномъ спиртѣ.

Можно также вычислить вѣсъ и всякихъ другихъ тѣлъ по ихъ объему, но для этого нужно знать удѣльный или относительный вѣсъ того вещества, изъ котораго сдѣланъ предметъ.

Удѣльнымъ или относительнымъ вѣсомъ вещества называется то отвлеченное число, которое показываетъ, во сколько разъ это вещество тяжелѣе или легче воды при равныхъ объемахъ. Удѣльный вѣсъ иначе называется плотностью вещества.

Если выпилимъ изъ плотнаго куска желѣза кубикъ, величиною въ 1 куб. дюймъ, т. е., иначе говоря, возьмемъ 1 куб. дюймъ желѣза и свѣсимъ его, то найдемъ, что онъ вѣситъ $^8/_{25}$ фунта; а одинъ куб. дюймъ воды вѣситъ только $^1/_{25}$ фунта; значитъ, 1 куб. дюймъ желѣза въ 8 разъ тяжелѣе 1 куб. дюйма воды. Если возьмемъ кусокъ желѣза въ 2, 3, 4, 5... и т. д. куб. дюймовъ и свѣсимъ его, то найдемъ, что онъ будетъ всегда въ 8 разъ тяжелѣе 2-хъ, 3-хъ, 4-хъ, 5-ти... и т. д. куб. дюйма воды. Слѣдовательно, на основанiи этого, можемъ сказать, что *желѣзо тяжелѣе воды въ 8 разъ.* Вотъ это-то отвлеченное число 8, которое показываетъ, что желѣзо въ 8 разъ тяжелѣе равнаго ему объема воды, и будетъ удѣльный или относительный вѣсъ желѣза.

Какъ опредѣляется удѣльный вѣсъ различнаго вещества, это излагается въ курсахъ науки физики. Мы же приведемъ только таблицу удѣльнаго вѣса наиболѣе распространенныхъ тѣлъ, при чемъ обращаемъ вниманiе на то, что удѣльный вѣсъ тѣлъ, которыя тяжелѣе воды, всегда выражается цѣлымъ числомъ или цѣлымъ съ дробью, а удѣльный вѣсъ тѣлъ, которыя легче воды, всегда выражается дробью.

При обозначенiи удѣльнаго вѣса тѣлъ части единицы выражаются обыкновенно десятичными дробями.

Таблица удѣльнаго вѣса нѣкоторыхъ тѣлъ.

Платина	21,5	Цинкъ	7,2	Гранитъ	1,8
Золото	19,3	Стекло	3	Сѣрная кислота	1,8
Ртуть	13,6	Мраморъ	2,8	Дерев. масло	0,9
Свинецъ	11,3	Аллюминiй	2,6	Дубъ	0,8
Серебро	10,4	Обожжен. кирпичъ	2,2	Береза	0,6
Мѣдь	8,9	Известнякъ	2	Винный спиртъ	0,8
Желѣзо	8	Чистый песокъ	1,9	Сѣрный эфиръ	0,72
Олово	7,3	Чистая глина	1,9	Пробка	0,25

Зная удѣльный вѣсъ различныхъ тѣлъ, можно вычислить и вѣсъ ихъ по данному объему.

Примѣръ 1. *Вычислить вѣсъ мѣднаго прямого цилиндра, радiусъ основанiя котораго 2 фута, а высота — 2 саж*

Рѣшеніе. Замѣтимъ, что 2 саж. $=$ 14 ф.

Объемъ цилиндра $= \pi \times p^2 \times h = {}^{22}/_7 \times 2^2 \times 14 = 176$ куб. футъ.

Вѣсъ такого объема воды $= 69^3/_{25} \times 176 = 12165^3/_{25}$ фунта.

Вѣсъ даннаго цилиндра $= 12165^3/_{25} \times 8{,}9$, или $12165{,}12 \times 8{,}9 = 108269{,}568 = 2706{,}739$ пуд.

Примѣръ 2. *Чему равенъ вѣсъ усѣченной гранитной пирамиды съ квадратнымъ основаніемъ, если ребро нижняго основанія $=$ 6 футъ, ребро верхняго основанія $=$ 4 фута, высота-же усѣченной пирамиды 8 футъ, а удѣльный вѣсъ гранита $=$ 1,8?*

Рѣшеніе. Отношеніе высотъ цѣлой и отсѣченной пирам. будетъ $= 6 : 4$. Это значитъ, что въ высотѣ данной пирам. будетъ $6 - 4 = 2$ части, и въ нихъ— 8 фут.; слѣдовательно, въ одной части будетъ $8 : 2 = 4$ ф. Отсюда, высота цѣлой пирамиды $= 4 \times 6 = 24$ ф.; высота отсѣчен. пирам. $= 4 \times 4 = 16$ фут. Объемъ цѣлой пирамиды $= 6 \times 6 \times {}^{24}/_3 = 288$ куб. фут. Объемъ отсѣченной пирамиды $= 4 \times 4 \times {}^{16}/_3 = 85^1/_3$ куб. фут. Объемъ данной усѣченной пирамиды $= 288 - 85^1/_3 = 202^2/_3$ куб. фут. Такой объемъ воды вѣситъ $69^3/_{25} \times 202^2/_3 = 14008^8/_{25}$ фунта. Вѣсъ данной пирамиды $= 14008^8/_{25} \times 1{,}8 = 14008{,}32 \times 1{,}8 = 25214{,}976 = 630{,}374$ пуда.

Примѣръ 3. *Найти вѣсъ деревянной балки, которая имѣетъ $2^1/_2$ саж. длины, 6 верш. ширины и 4 верш. толщины, а удѣльный вѣсъ ея дерева $= {}^3/_4$.*

Рѣшеніе. Данный размѣръ балки можно выразить такъ: $2^1/_2$ с. $=$ 210 д., 6 верш. $=$ $10^1/_2$ дюйм., 4 верш $=$ 7 дюйм. Объемъ балки $= 210 \times 10^1/_2 \times 7 = 15435$ куб. дюйм. Вѣсъ такого же объема воды $= {}^1/_{25} \times 15435 = 617^2/_5$ фунта. Вѣсъ балки $= 617^2/_5 \times {}^3/_4 = 463^1/_{20}$ фун.

Примѣръ 4. *Найти вѣсъ пустого мѣднаго шара, толщина стѣнокъ котораго — 7 дюйм., а внутренній радіусъ $=$ 14 дюйм., а удѣльный вѣсъ его металла* $8^4/_5$.

Рѣшеніе. Радіусъ шара $= 7 + 14 = 21$ дюйм. Объемъ его $= {}^4/_3 \times \pi \times p^3 = {}^4/_3 \times 21^3 = {}^4/_3 \times {}^{22}/_7 \times 21 \times 21 \times 21 = 38808$ куб. д. Объемъ внутренней шарообразной пустоты $= {}^4/_3 \times {}^{22}/_7 \times 14^3 = {}^4/_3 \times {}^{22}/_7 \times 14 \times 14 \times 14 = 11498^2/_3$ куб. дюйм. Объемъ даннаго шара $= 38808 - 11498^2/_3 = 27309^1/_3$. Вѣсъ такого же объема воды $= {}^1/_{25} \times 27309^1/_3 = 1092^{28}/_{75}$ фунта. Вѣсъ даннаго шара $= 1092^{28}/_{75} \times 8^4/_5 = 9612^{332}/_{375}$ фунта.

Обозначая вѣсъ всякаго тѣла въ фунтахъ буквою Φ, объемъ тѣла, въ куб. дюймахъ буквою o и удѣльный вѣсъ—буквою n, для опредѣленія вѣса въ фунтахъ всякаго тѣла, имѣемъ такую формулу $\Phi = O \times \frac{1}{25} \times n = \frac{o \times n}{25}$.

Вѣсъ листового желѣза, мѣди, цинка и т. п. матеріала производится весьма часто при помощи особыхъ таблицъ, въ которыхъ обозначенъ вѣсъ одного квадратнаго фута различной толщины матеріала въ фунтахъ. Приводимъ образецъ подобной таблицы:

Вѣсъ квадратнаго фута въ фунтахъ *).

Толщина листа.	Желѣзо.	Чугунъ.	Мѣдь.	Латунь.	Свинецъ.
$^1/_{32}$ д.	1,386	1,296	1,602	1,53	2,052
$^1/_{16}$ »	2,772	2,592	3,204	3,06	4,104
$^1/_8$ »	5,544	5,184	6,408	6,12	8,208
$^1/_4$ »	11,09	10,37	12,82	12,24	16,42
$^1/_2$ »	22,18	20,74	25,63	24,48	32,83
1 »	44,35	41,47	51,26	48,96	65,66

Изъ этой таблицы видно, что квад. футъ мѣди толщиною въ $^1/_4$ дюйма вѣситъ 12,82 фунта (двѣнадцать цѣлыхъ и 82 сотыхъ фунта); квадратный футъ листового желѣза, толщиною въ $^1/_{16}$ дюйма, вѣситъ 2,772 и т. п.

Имѣя такую таблицу, уже легко вычислить вѣсъ какого-либо предмета, сдѣланнаго изъ листового матеріала.

Примѣръ. *Сколько вѣситъ чугунный кругъ, радіусомъ въ $3^1/_2$ фута и толщиною въ $^1/_2$ дюйма?*

Рѣшеніе Площадь даннаго круга $=\pi\times\rho^2=^{22}/_7\times(3^1/_2)^2=^{22}/_7\times3^1/_2\times3^1/_2=38^1/_2$ кв. фут. Вѣсъ 1 кв. фут. чугун. листа, толщиною въ $^1/_2$ дюйма, какъ видно изъ таблицы $=20,74$ фунта, значитъ вѣсъ даннаго круга $20,74\times38^1/_2=20,74\times38,5=798,49$ фунта.

79. Вычисленіе объема тѣлъ по вѣсу и плотности. Въ практикѣ встрѣчается иногда необходимость, хотя и очень рѣдко, не измѣряя, вычислить объемъ небольшого тѣла какой-либо неправильной формы. Кромѣ способа, указаннаго въ § 75, это возможно еще сдѣлать иначе, но при томъ лишь условіи, когда извѣстенъ вѣсъ этого тѣла, выраженный въ фунтахъ, или пудахъ, и его относительный или удѣльный вѣсъ.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. *Узнать объемъ воды, налитой въ сосудъ неправильной формы, если вѣсъ ея=200 фун.*

Рѣшеніе. Каждый куб. дюймъ воды вѣситъ $^1/_{25}$ ф., значитъ, вода занимаетъ объемъ въ $200:^1/_{25}=5000$ куб. дюйм.

Примѣръ 2. *Узнать объемъ куска сплава мѣди, вѣсомъ въ 44 фунта; удѣльный вѣсъ мѣди $8^4/_5$.*

Рѣшеніе. Мы знаемъ, что $^1/_{25}$ фун. воды вѣситъ 1 куб. дюймъ; значитъ, если бы дано было 44 ф. воды, то она заняла бы объемъ во столько кубич. дюймовъ, сколько разъ $^1/_{25}$ ф. содержится въ 44, т. е. $44:^1/_{25}=1100$ куб. д. А такъ какъ данная мѣдь въ $8^4/_5$ раза тяжелѣе воды, то объемъ даннаго ку-

*) Въ подобныхъ таблицахъ части цѣлыхъ фунтовъ выражаются также обыкновенно въ десятичныхъ доляхъ: десятыхъ, сотыхъ и тысячныхъ.

ска мѣди долженъ быть въ $8^4/_5$ раза менѣе 1100 кубич. дюйм. Онъ равенъ $1100 : 8^4/_5 = 125$ куб. д.

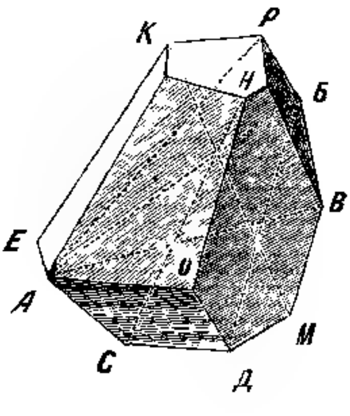
Примѣръ 3. *Найти объемъ куска дерева, вѣсомъ 18 фунтовъ; удѣльный вѣсъ этого дерева*$=^3/_4$.

Рѣшеніе. 18 фунтовъ воды вѣсятъ $18 : ^1/_{25} = 450$ куб д. Объемъ куска дерева$= 450 : ^3/_4 = 600$ куб. дюйм.

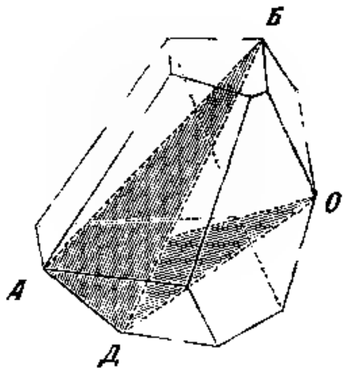
Обозначая объемъ всякаго тѣла буквою O, вѣсъ тѣла въ фунтахъ буквою Φ, а удѣльный вѣсъ тѣлъ буквою n, для опредѣленія объема всякаго тѣла имѣемъ слѣдующую формулу:

$$O = (\Phi : n) \cdot {}^1/_{25} = \frac{\Phi \times 25}{n}.$$

80. Неправильные многогранники. Кромѣ призмъ и пирамидъ, весьма часто въ практикѣ встрѣчаются и другіе многогранники. Всякій многогранникъ, у котораго грани не равны между собою, называется *неправильнымъ многогранникомъ.* У всякаго неправильнаго многогранника есть тѣ-же части, что и у призмъ и пирамидъ: грани, ребра, вершины и т. д. Во всякомъ неправильномъ многогранникѣ можно проводить *діагонали*, т. е. внутреннія линіи, соединяющія двѣ какія-либо вершины, такъ, напримѣръ (чер. 151) діагоналями представленнаго многогр. будутъ прямыя: *АБ*, *БД*, *КМ*, *АВ* и т. п.



Чер. 151.



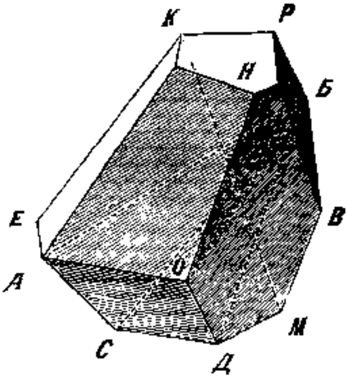
Чер. 152.

Во всякомъ неправильномъ многогранникѣ можно проводить внутри плоскости, которыя дѣлятъ многогранникъ на части; такъ, напримѣръ, внутри представленнаго многогранника (чер. 152) проведены 2 треугольныя плоскости: *АБД* и *АОД*. Внутренними плоскостями можно весь многогранникъ *раздѣлить на пирамиды:* стоитъ только одну изъ его вершинъ, или еще лучше, какую-либо произвольную внутреннюю точку принять за общую вершину всѣхъ пирамидъ, и затѣмъ, проводить плоскости такъ, чтобы каждая изъ

нихъ проходила бы черезъ выбранную общую вершину и еще черезъ двѣ какія-либо вершины многогранника; такъ, напримѣръ, въ многогранникѣ *АСДОБК*..... (чер. 153) проведены 4 плоскости и получилась одна пирамида *АОДСБ.* Подобнымъ образомъ можно разбить и весь данный многогранникъ на пирамиды.

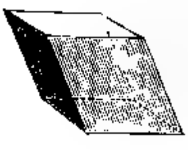
Два многогранника будутъ равны между собою, когда ихъ можно составить изъ равныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ.

Такъ какъ всякую кривую поверхность можно разсматривать, какъ поверхность, состоящую изъ безчисленнаго множества прямыхъ граней, то поэтому и всякое тѣло съ кривою поверхностью можно разсматривать, какъ неправильный многогранникъ съ безчисленнымъ множествомъ граней.

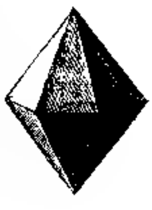


Чер. 153.

Нѣкоторые неправильные многогранники, имѣя неравные двугранные и многогранные углы, тѣмъ не менѣе по наружному виду имѣютъ правильную форму, такъ какъ ограничены равными гранями. Изъ такихъ многогранниковъ мы перечислимъ только слѣдующіе. 1) ромбоедръ (чер. 154). Этотъ шестигранникъ ограниченъ 6-ю равными ромбами, 2) квадратный восьмигранникъ (чер. 155), состоящій изъ двухъ правильныхъ и равныхъ пирамидъ, сложенныхъ вмѣстѣ своими квадратными основаніями; 3) треугольный двѣнадцатигранникъ


Чер 154.


Чер 155.


Чер. 156.


Чер. 157.

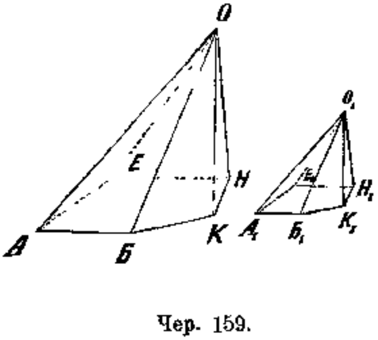

Чер 158

(чер. 156), состоящій изъ двухъ правильныхъ и равныхъ пирамидъ, сложенныхъ вмѣстѣ своими шестиугольными основаніями; 4) ромбоидальный двѣнадцатигранникъ (чер. 157), ограниченный 12-ю равными ромбами и 5) 24-гранникъ (стр. 158), ограниченный 24-мя равными неправильными четыреугольниками, изъ которыхъ каждый имѣетъ 2 равныя короткія стороны и 2 равныя длинныя стороны и др.

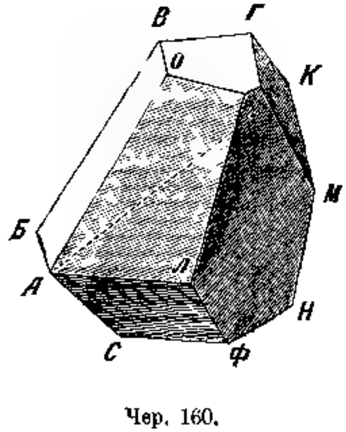
Всѣ эти формы тѣлъ и ихъ различныя соединенія встрѣчаются чаще всего въ минералахъ (кристаллы ихъ), но иногда и въ различныхъ украшеніяхъ столярныхъ и слесарныхъ работъ.

81. Измѣреніе кривыхъ поверхностей неправильныхъ многогранниковъ. Иногда является надобность измѣрить площадь какой-нибудь кривой поверхности неправильнаго многогранника. Это дѣлается такъ. по данной кривой поверхности проводятъ рядъ параллельныхъ линій на очень маломъ разстояніи одна отъ другой, и такимъ образомъ раздѣляютъ эту поверхность на части столь малыя, что каждую изъ нихъ, безъ большой ошибки, можно разсматривать, какъ плоскость; затѣмъ вычисляется площадь каждой изъ этихъ частей, и сумма отдѣльныхъ этихъ площадей и составитъ площадь плоскости, приблизительно равномѣрной данной кривой поверхности.

82. Подобные многогранники. Если возьмемъ двѣ одноименныя такія пирамиды (чер. 159), у которыхъ основанія представляютъ подобные многоугольники: мног. $АБКНЕ \backsim$ мн. $А_1Б_1К_1Н_1Е_1$ и двугранные и линейные углы одной пирамиды равны порознь двуграннымъ и линейнымъ угламъ другой, то такія пирамиды называются *подобными пирамидами*: пирамида $АБКНЕО \backsim$ пирамидѣ $А_1Б_1К_1Н_1Е_1О_1$.



Чер. 159.



Чер. 160.



Чер. 161.

Если два многогранника, какъ напримѣръ, многогранникъ $АБВГКМ...$ (чер. 160) и многогранникъ *абвгкм...* (чер. 161), могутъ быть составлены изъ равнаго числа подобныхъ и одинаково расположенныхъ пирамидъ, то такіе многогранники будутъ подобны между собою. Эти подобныя пирамиды, изъ которыхъ составляются подобные многогранники, называются *сходственными* пирамидами. Ребра соотвѣтственныхъ пирамидъ суть ребра или сходственныя діагонали многогранниковъ.

Подобные многогранники имѣютъ слѣдующія свойства: 1) *отношенія*

сходственныхъ линій: реберъ и діагоналей въ подобныхъ многогранникахъ равны между собою, т. е. если ребро *АБ* больше *аб* въ 3, 4, 5... разъ, то и ребро *КМ* больше соотвѣтственнаго ребра *км* тоже въ 3, 4, 5..... разъ, и ребро *МН* больше ребра *мн* въ 3, 4, 5... разъ, и діагональ *АК* больше діагонали *ак* тоже въ 3, 4, 5.... разъ и т. д.;

2) *отношенія площадей сходственныхъ граней и внутреннихъ сходственныхъ плоскостей равно отношенію квадратовъ сходственныхъ реберъ и діагоналей*; такъ, напримѣръ, пл. *АБВО* больше пл. *абво* во столько разъ, во сколько $АБ^2$ болѣе $аб^2$, или, во сколько разъ $АС^2$ болѣе $ас^2$, во столько же разъ и площадь *АЛФС* больше площади *алфс* и т. п.

3) *Отношеніе объемовъ двухъ подобныхъ многогранниковъ всегда равно отношенію кубовъ ихъ сходственныхъ реберъ, или діагоналей*; такъ, напримѣръ, объемъ многогр. *АБВГКМ*..... больше объема многогр. *абвгкм*..... во столько разъ, во сколько $АБ^3$ болѣе $аб^3$, или во сколько разъ $АК^3$ болѣе $ак^3$ и т. п.

Всѣми этими свойствами подобныхъ многогранниковъ пользуются всегда въ практикѣ. Укажемъ нѣсколько примѣровъ. Примѣръ 1. При производствѣ различныхъ предметовъ по образцу (по модели), который всегда представляетъ многогранникъ, подобный производимому предмету, стараются устроить у предмета плоскіе и двугранные углы, равные порознь такимъ же угламъ образца, и стараются сохранить равенство отношеній сходственныхъ реберъ (ихъ пропорціональность), употребляя для этого принятый масштабъ, такъ, напримѣръ, если одно рабро предмета сдѣлали въ 100 разъ болѣе соотвѣт. ребра образца, то и всѣ остальныя ребра также дѣлаютъ въ 100 разъ болѣе соотвѣтственныхъ реберъ. Также производится и обратная работа, т. е. производство по предмету образца.

Примѣръ 2. Когда исполненъ образецъ земной или морской постройки въ маломъ видѣ, то для вычисленія объема или вмѣстимости этой постройки можно измѣрить только объемъ образца, и по этому вычислить объемъ постройки Пусть образецъ исполненъ по масштабу въ сантиметръ, т. е при отношеніи соотвѣтственныхъ реберъ 1 : 100 Отношеніе кубовъ соотвѣтств. реберъ, на основаніи 3-го свойства подобныхъ многогранниковъ, будетъ: 1^3 100^3, или 1 : 1000000. Это значитъ, что объемъ постройки въ 1000000 разъ болѣе объема образца. Измѣривъ объемъ образца, останется его умножить на 1000000 и тогда получимъ объемъ постройки.

Примѣръ 3. Когда данъ образецъ и требуется опредѣлить, въ какомъ отношеніи, т. е. во сколько разъ нужно увеличить или уменьшить его размѣры, чтобы объемъ изготовляемаго предмета былъ бы увеличенъ или уменьшенъ въ данномъ отношеніи къ объему образца; такъ, напримѣръ, положимъ, имѣемъ образецъ, объемъ котораго—2 куб. фут., и требуется по нему сдѣлать предметъ съ объемомъ въ 200 куб. саж. Нужно узнать, во сколько разъ мы должны для изготовленія предмета увеличить всѣ размѣры образца. Въ этомъ случаѣ, обозначая буквами *А* и *а* какія-либо сходственныя линіи этихъ

обоихъ предметовъ, мы, на основаніи вышеизложеннаго 3-го́ свойства подобныхъ многогранниковъ, имѣемъ: A^3 должно быть болѣе a^3 во столько разъ, во сколько 200 куб. саж., или 68600 куб. фут. болѣе 2 куб. футъ. Отношеніе 68600 : 2 равно отношенію 34300 : 1. Итакъ, мы имѣемъ такое соединеніе двухъ равныхъ отношеній (пропорцію): $A^3 : a^3 = 34300 : 1$; но когда четыре числа составляютъ соединеніе двухъ равныхъ отношеній (пропорцію), то всегда и ихъ корни будутъ составлять тоже соединеніе равныхъ отношеній (тоже пропорцію) *), а потому, на основаніи этого, мы выраженіе $A^3 : a^3 = 34300 : 1$ можемъ замѣнить выраженіемъ $\sqrt[3]{A^3} : \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{34300} : \sqrt[3]{1}$, или $A : a = 70 : 1$ Это полученное выраженіе показываетъ, что измѣреніе ребра A постройки (а слѣдовательно и всѣ другія сходственныя ребра), должны быть въ 70 разъ болѣе измѣренія соотвѣтственнаго ребра a образца. Вообще надо, чтобы соотвѣтственныя измѣренія подобныхъ многогранниковъ находились въ томъ же отношеніи между собою, въ какомъ отношеніи находятся между собою кубичные корни ихъ объемовъ, т. е. *если объемъ одного многогранника долженъ быть въ 8, 27, 64.., раза болѣе объема другого, подобнаго ему многогранника, то надо, чтобы соотвѣтственныя измѣренія были бы увеличены въ* $\sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}, \sqrt[3]{64}$ ... или въ 2, 3, 4 и т. п. раза.

88. Подобные цилиндры и конусы. Подобными цилиндрами называются такіе цилиндры, у которыхъ отношеніе высотъ равно отношенію радіусовъ основаній (высоты пропорціональны основаніямъ). Также и подобными конусами называются только тѣ конусы, у которыхъ отношенія высотъ равны отношенію радіусовъ основаній.

Если возьмемъ 2 подобныхъ цилиндра, у которыхъ высота одного болѣе высоты другого въ 2, 3, 4 .. и т. д. разъ и вычислимъ ихъ объемы, то найдемъ, что объемъ одного цилиндра будетъ всегда болѣе объема другого подобнаго ему цилиндра не въ 2, 3, 4 и т. д.. а въ 2^3, 3^3, 4^3 и т. д., или въ 8, 27, 64 и т. д. разъ, *т. е. объемы подобныхъ цилиндровъ относятся между собою, какъ кубы радіусовъ ихъ основаній.*

Это свойство имѣютъ и подобные конусы, т. е. *объемы подобныхъ конусовъ относятся какъ кубы радіусовъ ихъ основаній.* На основаніи этого свойства подобныхъ тѣлъ вращенія, можно иногда вычислить, не измѣряя, объемъ какого-либо конуса или цилиндра по объемамъ подобныхъ имъ тѣлъ и высотамъ данныхъ тѣлъ; такъ, напримѣръ, если, положимъ, объемъ одного конуса, высотою въ 10 дюйм. — 300 куб. дюйм.; то объемъ другого, подобнаго ему конуса, высота котораго=20 дюймамъ, будетъ болѣе 300 куб. дюйм. во столько разъ, во сколько 20^3 болѣе 10^3, или во столько разъ, сколько 8000 болѣе 1000, т. е. въ 8 разъ, а слѣдовательно объемъ неизвѣстнаго конуса — 300×8 = 2400 куб. дюйм.

---

*) Если $100 : 25 = 16 : 4$, то и $\sqrt{100} : \sqrt{25} = \sqrt{16} : \sqrt{4}$, или $10 : 5 = 4 : 2$; если $64 : 8 = 1000 : 125$, то и $\sqrt[3]{64} : \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{1000} : \sqrt[3]{125}$ или $4 : 2 = 10 : 5$ и т. п.

84. Средняя ариөметическая величина. Если возьмемъ 3 числа: 12, 9 и 6, то, сравнивъ ихъ между собою, найдемъ, что насколько 1-е изъ нихъ число 12 болѣе 2-го, числа 9, настолько же это 2-е число 9 болѣе 3-го числа 6, а именно: 12—9=3, и 9—6=3. Замѣтимъ, что $(12+6)=9\times2$, и $9=\frac{(12+6)}{2}$. Изъ приведеннаго примѣра мы видимъ, что между данными числами среднее изъ нихъ, число 9 имѣетъ такое свойство: оно равно суммѣ другихъ данныхъ чиселъ, раздѣленныхъ на ихъ количество. Это число 9 будетъ *среднимъ ариөметическимъ числомъ* двухъ данныхъ чиселъ 12 и 6.

Среднее ариөметическое число можно найти и для нѣсколькихъ чиселъ.

Примѣръ. *Даны 4 числа. 17, 18, 20 и 5. Найти ихъ среднее ариөметическое число.*

Рѣшеніе. Находимъ сначала сумму данныхъ чиселъ. Она равна $(17+18+20+5)=60$. Раздѣливъ эту сумму 60 на количество данныхъ чиселъ, на 4, мы и получимъ среднее ариөметическое ихъ число; оно равно $60:4=15$.

Итакъ, *среднимъ ариөметическимъ числомъ данныхъ чиселъ называется то число, которое получается отъ раздѣленія суммы данныхъ чиселъ на ихъ количество.*

Средняя ариөметическая величина можетъ быть и между линіями, площадями и объемами.

Примѣръ 1. *Даны двѣ прямыя и нужно найти третью, которая составляла бы среднюю ариөметическую величину между ними.*

Рѣшеніе. Для этого мы находимъ чертежомъ сумму данныхъ прямыхъ и дѣлимъ ее пополамъ. Найденная прямая составитъ половину суммы данныхъ прямыхъ и будетъ ихъ среднею ариөметическою величиною

Примѣчанія 1) Срединная линія въ трапеціи есть средняя ариөметическая величина между основаніями трапеціи.

2) Периметръ срединнаго сѣченія въ правильной усѣченной пирамидѣ есть средняя ариөметическая величина между периметрами ея основаній.

3) Окружность срединнаго сѣченія прямого конуса есть средняя ариөметическая величина между окружностями обоихъ основаній конуса.

Примѣръ 2. *Раздѣлить данный прямоугольникъ, состоящій изъ 3 различныхъ площадей: въ 35 кв. дюйм., въ 65 кв. дюйм. и въ 20 кв. дюйм., на 3 равныя площади.*

Рѣшеніе. Для рѣшенія этого вопроса мы должны найти величину площади даннаго прямоугольника, для чего, конечно, нужно сложить числа: 35 кв. д. + 65 кв. д. + 20 кв. д. и получимъ 120 квадр. дюйм.; теперь эту сумму раздѣлимъ на 3; 120 : 3 = 40 кв. дюйм.; слѣдовательно, въ каждой искомой части должно быть по 40 квадр. дюйм. Эта площадь въ 40 кв. дюйм., полученная отъ раздѣленія суммы трехъ площадей 120 кв. дюйм. на количество площадей, на 3, и будетъ среднею ариөметическою величиною данныхъ 3-хъ площадей.

Итакъ, *средней ариөметической величиной нѣсколькихъ данныхъ величинъ*

называется та, которая получается отъ раздѣленія суммы данныхъ величинъ на ихъ количество.

85. Нахожденіе средней ариѳметич. величины иногда примѣняется при измѣреніи объема усѣченнаго конуса, обращеніемъ его въ приблизительно равновеликій цилиндръ.

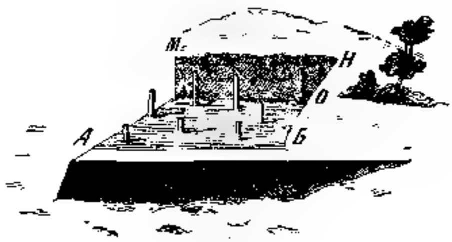
Примѣръ. *Найти объемъ усѣченнаго конуса, если діаметръ его верхняго основанія=8 вершк., а діаметръ его нижняго основанія=10 вершк., а высота его—14 вершк.*

Рѣшеніе. Находимъ сначала среднее ариѳмет. число между 8 и 10; оно будетъ$=\frac{10+8}{9}$. Теперь вычислимъ объемъ цилиндра, у котораго діаметръ равенъ 9 вершк., а высота—14 вершк. Радіусъ этого цилиндра будетъ$=9:2=4^1/_2$ вер. Объемъ его$={}^{22}/_7\times(4^1/_2)^2\times14=891$ куб вер.; значитъ, и объемъ даннаго конуса равенъ приблизительно этому же объему, т. е. 891 куб. вер.

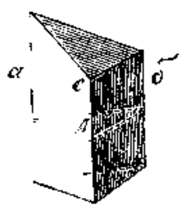
Этотъ способъ вычисленія объема усѣченнаго конуса обращеніемъ его въ приблизительно равновеликій цилиндръ тѣмъ болѣе неточенъ, чѣмъ больше отличаются оба основанія конуса другъ отъ друга. Не смотря на это, иногда, какъ мы увидимъ ниже, этотъ способъ примѣняется къ опредѣленію объема бочки, разсматривая ее, какъ сумму 2 усѣченныхъ конусовъ, сложенныхъ между собою нижними основаніями.

86. Вычисленіе средней ариѳметической величины примѣняется еще и въ другихъ случаяхъ. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Примѣръ 1. *Найти объемъ срытаго косогора АКМНОБ, отъ котораго для опредѣленія средней высоты его оставлено 8 столбовъ.* (Чер. 162).



Чер. 162.



Чер. 163.

Рѣшеніе. Измѣряемъ длину выемки *АБ*, ширину ея *АК* и высоту всѣхъ столбовъ. Пусть $АБ=30$ арш., $АК=18$ арш., а высота столбовъ: 5 арш., $4^1/_2$ арш., $3^1/_4$ арш., 3, арш., 3 арш., $2^1/_4$ арш, 2 арш. и 1 арш. Далѣе находимъ среднее ариѳм. число всѣхъ высотъ столбовъ. Она равна $(5+4^1/_2+3^1/_4+3+3+2^1/_4+2+1):8=24:8=3$ арш Объемъ косогора$=30\times18\times3=1620$ куб. арш.$=60$ куб. саж.

Примѣръ 2. *Найти объемъ трегранной призмы, усѣченной не параллельно основанію.* (Чер. 163).

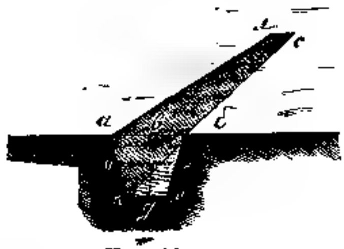
Рѣшеніе. Измѣряемъ боковыя ребра a, $б$ и c и находимъ ихъ среднее ариѳметическое число. Пусть $б=8$ ф., $a=10$ ф. и $c=6$ ф. Среднее ариѳметическое число этихъ чиселъ будетъ$=(8+10+6):3=24:3=8$. Далѣе находимъ площадь A перпендикулярнаго сѣченія къ боковому ребру. Пусть оно$=10$ кв. ф. Объемъ данной призмы$=8\times10=80$ куб. ф.

Примѣръ 3. *Найти объемъ ящика, боковыя стѣнки котораго имѣютъ наклонное положеніе къ основанію.* (Чер. 164).

Рѣшеніе. Измѣряемъ внутреннюю длину ящика *аб*, ширину *км* и высоту *од* *). Пусть $аб=3$ арш., $км=2^1/_2$ арш., а высота $од=^3/_4$ арш. Объемъ ящика приблизительно$=3\times2^1/_2\times{}^3/_4=5^5/_8$ куб арш. Подобнымъ образомъ вычисляется объемъ кузова телѣги, тачки, выемокъ земли для канавъ и т. п.



Чер. 164.



Чер. 165.

Примѣръ 4. *Вычислить объемъ канавы.* (Чер 165).

Рѣшеніе Измѣряемъ длину канавы *ал*, линію *аб* и линію *км* и глубину *дв*. Пусть $ал=10$ саж., $аб=4$ фут., $км=2$ фут. и $ов=5$ ф.

Находимъ сначала среднее ариѳметическое число между *аб* и *км*. Оно равно $(4+2)=6:2=3$ фут. (можно и прямо мѣрить прямую OH, которая тоже будетъ $=3$ фут.). Затѣмъ перемножимъ всѣ эти числа и получимъ объемъ канавы. Онъ$=10$ саж. или 70 ф.$\times3\times5=1050$ куб. фут

87 Средняя геометрическая или средняя пропорціональная величина. Если возьмемъ 3 числа: 32, 8 и 2 и найдемъ отношенія между ними $32:8=4$, и $8:2=4$, то увидимъ, что отношеніе между 1-мъ числомъ и 2-мъ равно отношенію между 2-мъ и 3-мъ числомъ, т. е. что 1-е большее число 32 во столько разъ больше 2-го средняго числа 8, во сколько разъ это 2-е число 8 больше 3-го меньшаго числа 2. Замѣтимъ, что $32\times2=8\times8=64$, или $32\times2=8^2=64$, а само среднее число $8=\sqrt{64}$.

Изъ приведеннаго примѣра мы видимъ, что между данными числами, среднее изъ нихъ по величинѣ, число 8, имѣетъ такое свойство, что его квадратъ $8\times8=64$ равенъ произведенію остальныхъ двухъ чиселъ $32\times2=64$, и что оно равно квадратному корню изъ произведенія этихъ чиселъ. *Это число 8*

*) Длина ящика *аб* и ширина его *км* есть также среднеариѳметическія величины.

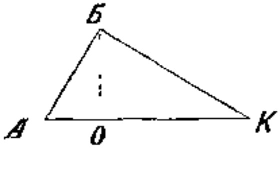
будетъ среднимъ пропорціональнымъ числомъ между другими данными числами 32 и 4. Число 9 будетъ среднимъ пропорціональнымъ между 27 и 3, такъ какъ $27:9=3$ и $9:3=3$, и также $27 \times 3 = 9 \times 9 = 9^2 = 81$, а само число $9=\sqrt{81}$; число 4 будетъ среднимъ пропорціональнымъ между 8 и 2 и т. п. Итакъ, *среднимъ пропорціональнымъ числомъ между двумя данными числами называется только такое число, котораго квадратъ равняется произведенію двухъ данныхъ чиселъ.*

Зная это свойство средняго пропорціональнаго числа, легко его и находить, если извѣстны оба данныхъ числа.

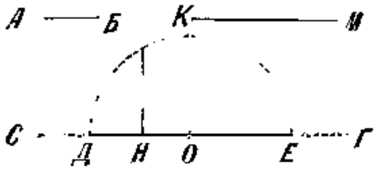
Примѣръ. *Найти среднее пропорціональное число, между 48 и 3.*

Рѣшеніе. Назовемъ среднее пропорціональное неизвѣстное число x. Тогда на основаніи вышеизложеннаго его свойства, мы имѣемъ. $48 \times 3 = x \times x = x^2$, или $144 = x^2$; отсюда $x = \sqrt{144} = 12$. Итакъ, $x = 12$. И дѣйствительно, $48:12 = 4$, и $12:3 = 4$, а слѣдовательно $48 \times 3 = 12 \times 12 = 12^2 = 144$.

Между линіями также можетъ быть одна средняя пропорціональная, между 2-мя другими, такъ, напримѣръ (черт. 166), если мы возьмемъ прямоугольный △ *АБК* и изъ вершины его прямого угла опустимъ ⊥ *БО* на гипотенузу *АК*, то измѣряя линіи *АО*, *ОК* и ⊥ *БО* и, найдя отношенія между ними, мы увидимъ, что въ данномъ примѣрѣ *ОК* будетъ болѣе *БО* въ 3 раза и *БО* болѣе *ОА* тоже въ 3 раза; значитъ, линія *БО* будетъ средней пропорціональной линіи между отрѣзками гипотенузы *АО* и *ОК*, и $БО^2 = АО \cdot ОК$. Дѣлая подобныя построенія, мы всегда получимъ то же самое. Итакъ, *перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла въ прямоугольномъ △ на гипотенузу, есть средняя пропорціональная линія между полученными отрѣзками гипотенузы.*



Чер. 166.



Чер. 167.

На этомъ свойствѣ прямоугольнаго △ основано и нахожденіе средней пропорціональной прямой линіи между двумя данными отрѣзками.

Примѣръ. *Даны два отрѣзка АБ и КМ. Найти къ нимъ среднюю пропорціональную прямую.* (Чер. 167).

Рѣшеніе. Проводимъ произвольную прямую *СГ* и на ней, отъ произвольной точки *Н* откладываемъ сначала отрѣзокъ *ДН* = *АБ*, а потомъ, отъ точки *Н* откладываемъ отрѣзокъ *НЕ* = *КМ*, т. е. находимъ сумму данныхъ отрѣзковъ *ДЕ* = *АБ*+*КМ*. Далѣе, найденную сумму *ДЕ* дѣлимъ пополамъ и

изъ точки O, какъ изъ центра, проводимъ полуокружность радіусомъ $OД$. Возставивъ $\perp$ HB *) къ діаметру $ДЕ$ изъ точки H, и, продолживъ его до пересѣченія съ полуокружностью, мы и получимъ прямую HB, которая и будетъ средней пропорціональной линіей между данными прямыми $АБ$ и $КМ$, потому что этотъ $\perp$ HB, какъ видно изъ чертежа, есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла прямоугольнаго Δ $ДВЕ$ на его гипотенузу $ДЕ$ (уголъ $ДВЕ = d$, какъ вписанный и опирающійся на концы діаметра), слѣдовательно, EH болѣе HB во столько разъ, во сколько HB болѣе $HД$ или, замѣняя $ДН = АБ$ и $НЕ = КМ$, имѣемъ $КМ$ болѣе HB во столько разъ, во сколько HB болѣе $АБ$, и значитъ $HB^2 = АБ \times КМ$.

Средняя пропорціональная величина можетъ быть и между площадями и объемами.

Примѣръ. *Даны два треугольника: у одного основаніе = 10 футъ, а высота $6^2/_5$ фута, а у другого основаніе = 6 ар., а высота $2^2/_3$ ф. Найти площадь третьяго Δ, которая была бы средней пропорціональной величиной между площадями данныхъ треугольниковъ.*

Рѣшеніе. Площадь 1-го треугольника $= (10 \times 6^2/_5) : 2 = 32$ кв. ф.; площадь другого даннаго треугольника $= (6 \times 2^2/_3) : 2 = 8$ кв. дюйм.; значитъ, площадь искомаго Δ должна быть средне пропорціональнымъ числомъ между числами 32 и 8. Чтобы найти это число, мы должны найти произведенія этихъ чиселъ $32 \times 8 = 256$ и исключить изъ него квадратный корень: $\sqrt{256} = 16$. Итакъ, площадь искомаго треугольника будетъ равна 16 квадр. дюйм., потому что 32 болѣе 16 во столько разъ, во сколько 16 болѣе 8 и $32 \times 8 = 16 \times 16 = 16^2 = 256$.

Итакъ, *средней пропорціональной величиной между двумя данными величинами называется такая величина, квадратъ которой равенъ произведенію данныхъ величинъ.* Всякая числовая неизвѣстная средняя пропорціональная величина находится такъ: находятъ произведеніе данныхъ величинъ и изъ него извлекаютъ квадратный корень, который и будетъ искомой средне-пропорціональной величиной.

88. Нахожденіе неизвѣстной средней пропорціональной величины примѣняется иногда при вычисленіи объема усѣченной пирамиды и объема усѣченнаго конуса по даннымъ основаніямъ и высотамъ этихъ тѣлъ. Это вычисленіе производится на основаніи слѣдующихъ свойствъ этихъ тѣлъ: *объемъ всякой усѣченной пирамиды съ параллельными основаніями равенъ суммѣ объемовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ высоту общую съ усѣченной пирамидою, а основанія ихъ равны: первой — нижнему основанію данной усѣченной пирамиды, у другой — верхнему ея основанію, а у третьей средней пропорціональной площади между обѣими площадями основанія данной усѣченной пирамиды.*

*) Буква B, обозначающая точку пересѣченія полуокружности съ перпендикуляромъ, не поставлена на чертежѣ. Также не обозначены на чертежѣ и линія $ВД$ и $ДЕ$.

Подобное свойство имѣетъ и прямой усѣченный конусъ, а именно: *объемъ прямого усѣченнаго конуса съ параллельными основаніями равенъ суммѣ объемовъ трехъ конусовъ, имѣющихъ высоту общую съ усѣченнымъ конусомъ, а основанія ихъ равны: у перваго—нижнему основанію даннаго усѣченнаго конуса, у другого — верхнему его основанію, а у третьяго — средней пропорціональной площади между обѣими площадями основаній даннаго усѣченнаго конуса.*

Примѣръ 1. *Узнать объемъ усѣченной неправильной пирамиды, у которой нижнее основаніе = 9 квадр. дюйм., верхнее=4 квад. дюйма, а высота 15 дюйм.*

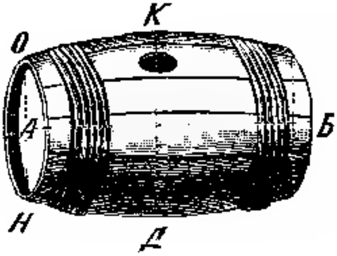
Рѣшеніе. Найдемъ сначала среднее пропорціональное число между 9 и 4. Оно будетъ $= \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$. Теперь находимъ объемы 3 пирамидъ: объемъ 1-й $= 9 \times {}^{15}/_{3} = 45$ куб. дюйм.; объемъ 2-й $= 4 \times {}^{15}/_{3} = 20$ куб. дюйм.; объемъ 3-й $= 6 \times {}^{15}/_{3} = 30$ куб. дюйм. Объемъ данной усѣченной пирамиды $= 45 + 20 + 30 = 95$ куб. дюйм.

Примѣръ 2. *Вычислить объемъ прямого усѣченнаго конуса, у котораго нижнее основаніе = 27 квадр. дюйм., верхнее = 12 квадр. дюйм., а высота = 12 дюйм.*

Рѣшеніе. Средняя пропорціональная величина между 27 и 12 будетъ $= \sqrt{27 \times 12} = \sqrt{324} = 18$. Теперь находимъ объемъ 3 конусовъ: 1-го $= 27 \times {}^{12}/_{3} = 108$ куб. дюйм.; 2-го $= 12 \times {}^{12}/_{3} = 48$ куб. дюйм., и 3-го $= 18 \times {}^{12}/_{3} = 72$ куб. дюйма. Объемъ даннаго конуса $= 108 + 48 + 72 = 228$ куб. дюйм.

Подобнымъ вычисленіемъ объема усѣченнаго конуса пользуются для болѣе приближеннаго вычисленія объема всякой бочки, принимая ее за сумму двухъ равныхъ конусовъ, сложенныхъ большими основаніями.

Примѣчаніе. Выражая буквами P и p радіусы основаній усѣченнаго конуса и буквою K его высоту, получимъ такую формулу: объемъ усѣченнаго конуса $= \left(\pi \times P^2 \times \frac{K}{3}\right) + \left(\pi \times p^2 \times \frac{K}{3}\right) + \left[\sqrt{(\pi \times P^2) \times (\pi \times p^2)} \times \frac{K}{3}\right] = \left(\pi \times P^2 + \frac{K}{3}\right) + \left(\pi \times p^2 \times \frac{K}{3}\right) + \left(\sqrt{\pi^2 \times P^2 \times p^2} \times \frac{K}{3}\right) = \left(\pi \times P^2 \times \frac{K}{3}\right) + \left(\pi \times p^2 \times \frac{K}{3}\right) + \left(\pi \times P \times p \times \frac{K}{3}\right) = [P^2 + p^2 + (P \times p)] \times \pi \times \frac{K}{3}$, т. е. чтобы узнать объемъ усѣченнаго конуса, то нужно сначала узнать: 1) *квадратъ радіуса нижняго основанія,* 2) *квадратъ радіуса верхняго основанія и* 3) *произведеніе радіусовъ, затѣмъ сложить эти три величины и полученную сумму умножить на* π, *т. е. на* ${}^{22}/_{7}$ *и на* ${}^{1}/_{3}$ *высоты конуса.*



Чер. 168.

89. Измѣреніе объема бочки (чер. 168). Части всякой бочки имѣютъ слѣдующія названія: окружность дна бочки называется *уторомъ*, окружность

той выдающейся части бочки, гдѣ находится отверстіе (втулка), называется ея *выпуклостью*, а разстояніе $AБ$ между днами—ея *длиною* *).

Всякую бочку можно разсматривать какъ тѣло, состоящее изъ 2-хъ равныхъ усѣченныхъ конусовъ, сложенныхъ своими большими основаніями, а потому, на основаніи вышеизложеннаго вычисленія объема усѣченнаго конуса, объемъ всякой бочки можно выразить слѣдующей формулой $[P^2+p^2+(P\times p)] \times \pi \times \frac{\kappa}{3} \times 2$, или $[P^2+p^2+(P\times p)] \times \pi \times \frac{2\kappa}{3}$; но 2κ, т. е. сумма двухъ половинъ ея длины (сумма высотъ конусовъ) = длинѣ бочки $AБ = a$, а потому и получимъ такую окончательную формулу для вычисленія объема бочки: $[P^2+p^2+(P\times p)] \times \pi \times \frac{a}{3}$. Эта формула выражаетъ, что для вычисленія объема бочки нужно найти. 1) *квадратъ радіуса утора (дна бочки)*, 2) *квадратъ радіуса ея выпуклости и* 3) *произведеніе этихъ радіусовъ; затѣмъ сложить эти три величины и полученную сумму сначала умножить на* π, *т. е. на* $^{22}/_7$, *а затѣмъ на* $^1/_3$ *ея длины, по направленію ея оси.*

Примѣръ. *Узнать объемъ бочки, если діаметръ ея утора = 26 дюйм.; діаметръ ея выпуклости = 30 дюйм., а ея длина 90 дюйм.*

Рѣшеніе. Радіусъ утора бочки = 26 : 2 = 13 д.; радіусъ ея выпуклости = 30 : 2 = 15 дюйм; квадратъ радіуса утора = 13 × 13 = 169; квадратъ радіуса выпуклости = 15 × 15 = 225, произведеніе этихъ радіусовъ = 13 × 15 = 195. Сумма всѣхъ этихъ величинъ = 169 + 225 + 195 = 589. Объемъ бочки = 589 × $^{22}/_7$ × $^{90}/_3$ = 55534 $^2/_7$ куб. дюйм., что составитъ около 74,045 ведра.

Этотъ способъ вычисленія объема бочки не совсѣмъ точенъ, такъ какъ линія, образующая боковую поверхность бочки, на самомъ дѣлѣ кривая, а не ломаная, какъ принимается при этомъ вычисленіи.

Примѣчаніе. Для болѣе точнаго вычисленія объема бочки находятъ: 1) квадратъ діаметра утора, и 2) двойной квадратъ діаметра выпуклости; затѣмъ, берутъ сумму этихъ величинъ и умножаютъ ее сначала на длину бочки, а потомъ на $^1/_3$, или объемъ бочки $(p \times 2P^2) \times \pi \times \frac{a}{3}$.

Весьма часто измѣряютъ объемъ бочки гораздо проще вышеизложеннаго способа, замѣняя его приблизительно равновеликимъ цилиндромъ, за діаметръ котораго принимаютъ среднее ариѳметическое число между діаметромъ дна и діаметромъ выпуклости

Примѣръ. *Найти приблизительный объемъ бочки, если діаметръ ея утора = 24 дюйма, а діаметръ ея выпуклости — 32 дюйма, длина же бочки = 49 дюйм*

Рѣшеніе. Діаметръ приблизительно равновеликаго цилиндра данной бочки будетъ = (32 + 24) : 2 = 28, а радіусъ этого цилиндра = 28 : 2 = 14 д. Высота цилиндра=длинѣ бочки, т. е. 49 д. Объемъ этого цилиндра, или приблизи-

---

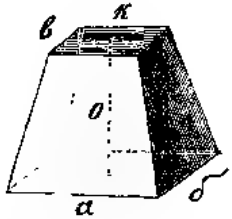
*) Для вычисленія объема бочки измѣряютъ: діаметръ HO ея утора, діаметръ $ДК$ ея выпуклости и длину $AБ$. Эту длину $AБ$ въ формулѣ мы будемъ выражать буквою a.

тельный объемъ данной бочки $= \pi \times P^2 \times АБ = {}^{22}/_7 \times 14^2 \times 49 = 30184$ куб. дюйм. Зная, что ведро $= 750$ куб. дюйм., вмѣстимость данной бочки можно выразить въ ведрахъ.

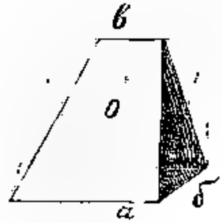
90. Вычисленіе объема тѣлъ, которыя рѣдко встрѣчаются въ практикѣ *).

Объемъ обелиска (чер. 169). Выражая ребро его нижняго основанія буквами *а* и *б*, а ребра верхняго основанія *в* и *к*, и высоту черезъ букву *о*, для вычисленія объема этого тѣла имѣемъ слѣдующую формулу:

$$= \frac{1}{6} \times O \times \left\{ (2а + к) \times б + (2к + а) \times в \right\}.$$

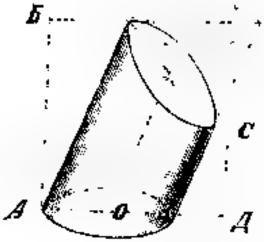


Чер. 169.

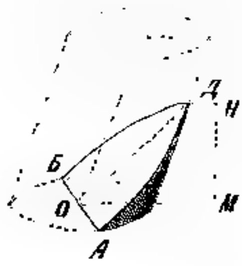


Чер. 170.

Объемъ клина (чер. 170). Выражая ребра нижняго основанія клина буквами *а* и *б*, ребро острія—буквою *в*, а высоту клина буквою *о*, для вычисленія его объема имѣетъ такую формулу. $^1/_6 \times (2а + в) \times б \times о$.



Чер. 171.



Чер. 172.

Объемъ цилиндра, усѣченнаго непараллельно основанію (чер. 171). Выражая радіусъ основанія такого цилиндра черезъ *р*, высоту одного бока *АБ*—буквою *К* и высоту другого бока *ДС*—буквою *к*, для вычисленія его объема имѣемъ такую формулу. $= {}^1/_2 \times \pi \times p^2 \times (К + к)$.

Для вычисленія боковой поверхности этого тѣла существуетъ такая формула: $н = \pi \times p \times (К + к)$.

Объемъ отрѣзка цилиндра (чер. 172) *плоскостью, проходящей черезъ*

*) Чтобы не удлинять курса, мы приводимъ только однѣ формулы для вычисленія объемовъ этихъ тѣлъ.

точку на производящей и центръ основанія. Выражая радіусъ основанія этого тѣла, или $^1/_2 АБ$, буквою p, а высоту отрѣзка $МН$ буквою $к$, имѣемъ слѣдующую формулу для вычисленія его объема: $= {}^2/_3 \times p^2 \times к$.

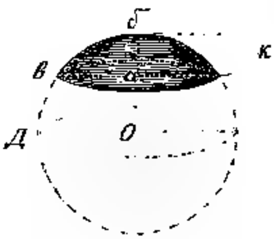
Для вычисленія боковой поверхности этого тѣла существуетъ такая формула: $п = 2 \times p \times к$.

Объемъ шарового сегмента (чер. 173). Выражая радіусъ сегмента *ав* буквою p, а высоту сегмента *аб* буквою $к$, для вычисленія его объема имѣемъ такую формулу: $= {}^1/_6 \times \pi \times к \times (3p^2 + к^2)$. Если же выразимъ радіусъ шара, часть котораго составляетъ данный сегментъ, буквою P, то имѣемъ еще для объема сегмента и другую формулу: $= {}^1/_3 \times \pi \times к^2 \times (3R—к)$.

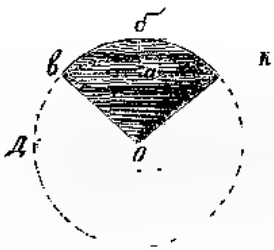
Для вычисленія одной сферической поверхности сегмента имѣется такая формула: $п = 2 \times \pi \times R \times к$ (буквою P обозначенъ радіусъ шара).

Объемъ шарового сектора (чер. 174). Выражая радіусъ шара $ОД$ буквою P, а высоту сегмента *аб* буквою $к$, для вычисленія объема шарового сектора имѣемъ такую формулу: $= {}^2/_3 \times \pi \times P^2 \times к$.

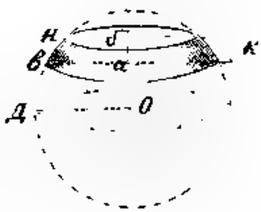
Для вычисленія полной поверхности шарового сектора имѣемъ слѣдующую формулу: $П = \pi \times P \times (2к + p)$, въ которой буквою p выражается радіусъ *ав*—сегмента.



Чер. 173.



Чер. 174



Чер. 175.

Объемъ шарового пояса (зона) (чер. 175). Выражая радіусъ нижняго основанія этого тѣла *ав* буквою p, радіусъ верхняго основанія *нб* буквою p, и высоту зоны *аб* буквою $к$, имѣемъ для вычисленія ея объема такую формулу $= {}^1/_6 \times \pi \times к \times (3p^2 + 3p_1{}^2 + к^2)$.

Для вычисленія боковой поверхности зоны имѣемъ такую формулу: $п = 2 \times \pi \times P \times к$, въ которой буквою P выражается радіусъ $ОД$ того шара, часть котораго составляетъ зона. Для вычисленія полной поверхности зоны имѣется такая формула: $П = \pi \times (p^2 + 2 P \times к + p_1{}^2)$.

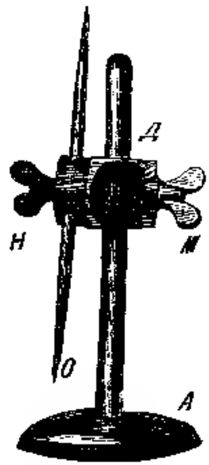
Объемъ эллипсоида (черт. 141). Выражая буквою $а$ большую полуось эллипса, отъ вращенія котораго и получается это тѣло, а буквою $в$—его малую полуось, для вычисленія объема этого тѣла имѣемъ такія формулы: $О = {}^4/_3 \times \pi \times а \times в^2$, и $О = {}^4/_3 \times \pi \times а^2 \times в$. Первая изъ этихъ формулъ выражаетъ объемъ эллипсоида, происходящаго отъ вращенія эллипса около большой его оси,

а вторая выражаетъ объемъ эллипсоида, происходящаго отъ вращенія эллипса около малой его оси.

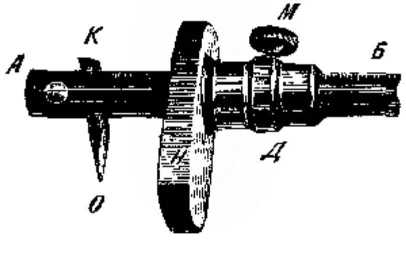
91. Приборы для разбивки частей изготовляемыхъ предметовъ изъ матеріала по данному размѣру. При изготовленіи предметовъ изъ матеріала по данному размѣру для разбивки частей ихъ, кромѣ обыкновенныхъ. циркуля, наугольника и керна, употребляются еще слѣдующіе приборы. разбивочный столъ, чертилка, вертикальный измѣрительный приборъ и приборъ для обозначенія центра въ небольшихъ цилиндрическихъ предметахъ.

Разбивочный столъ состоитъ изъ прочнаго большого стола (а иногда и просто одной поскости), у котораго плоскость верхней чугунной или деревянной доски отшлифована и установлена горизонтально по уровню. Иногда приходится устраивать разбивочныя плоскости очень большихъ размѣровъ, какъ напримѣръ, при изготовленіи частей, необходимыхъ при кораблестроеніи

Чертилка (чер. 176). Этотъ приборъ состоитъ изъ тяжелаго металлическаго основанія *А*, нижняя плоскость котораго провѣрена. Въ серединѣ основанія наглухо придѣлана вертикальная стойка, поставленная по отвѣсу къ плоскости основанія По этой стойкѣ движется вверхъ и внизъ муфта *Д*, которая имѣетъ два зажимныхъ винта: винтъ *М* прикрѣпляетъ муфту къ стойкѣ, а винтъ *Н* закрѣпляетъ неподвижно довольно толстую стальную иглу съ остріемъ *О*. Игла можетъ двигаться въ муфтѣ и придѣлана къ ней такъ, что можетъ вращаться около оси винтовъ.



Чер. 1,6



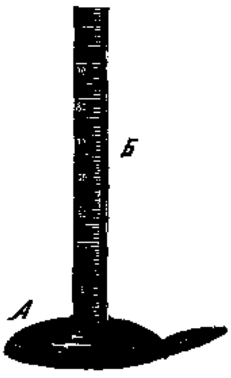
Чер. 177.

Этотъ приборъ употребляется для разбивки частей предмета, находящихся въ вертикальныхъ или наклонныхъ плоскостяхъ.

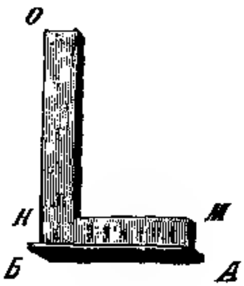
Для нанесенія на матеріалъ по чертежу точекъ и линій изготовляемаго предмета въ горизонтальномъ направленіи употребляется чертилка другого устройства (чер. 177). Этотъ приборъ состоитъ изъ металлическаго стержня

АБ, на одномъ концѣ котораго вставлена игла *КО*, съ остріемъ *О*. По верхней части стержня отъ вертикальнаго направленія острія *О* намѣчены дѣленія футы, или аршины, или сантиметры. По стержню ходитъ муфта *Д*; она можетъ закрѣпляться въ любомъ мѣстѣ зажимнымъ винтомъ *М*. Съ передней стороны муфты *Д* наглухо придѣлана доска, передняя плоскость которой тщательно провѣрена. Эта плоскость доски можетъ устанавливаться на всякомъ данномъ разстояніи отъ вертикальнаго направленія острія *О* иглы прибора. Иногда этотъ приборъ замѣняютъ и приборомъ, представленнымъ на чер. 176, но только тогда второе остріе иглы дѣлается изогнутымъ.

Вертикальный измѣрительный приборъ (чер. 178) Это обыкновенный какой-либо металлическій измѣрительный приборъ *Б* аршинъ, футъ, или метръ, поставленный по отвѣсу къ горизонтальному тяжелому основанію *А*, нижняя плоскость котораго провѣрена.



Чер. 178.



Чер. 179.

Слесарный наугольникъ, употребляемый для разбивки частей изготовляемыхъ предметовъ (чер. 179), имѣетъ небольшое прибавленіе, въ видѣ дощечки (полочки) *АБ*, придѣланной наглухо къ меньшему бруску его *МН*. Это прибавленіе даетъ возможность прочно ставить такой наугольникъ въ вертикальной плоскости.

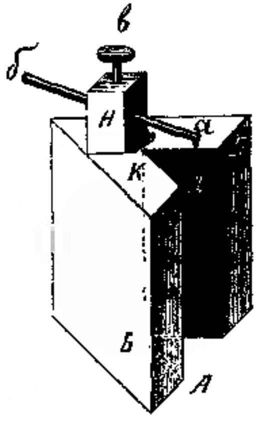
Всѣми этими приборами производятъ разбивку частей изготовляемаго предмета изъ матеріала по даннымъ размѣрамъ такъ: сначала на матеріалѣ, если это нужно, съ одной стороны образуютъ плоскость основанія, а затѣмъ кладутъ его этой плоскостью на разбивочный столъ, и ту часть матеріала, на которой желаютъ по чертежу намѣтить точки или ребра, замазываютъ мѣломъ Далѣе, берутъ вертикальный измѣрительный приборъ и чертилку, ставятъ ихъ на столъ, даютъ иглѣ чертилки горизонтальное направленіе и поднимаютъ муфту по стойкѣ и по измѣрительному прибору настолько, чтобы остріе *О* иглы (чер. 176) было бы отъ плоскости стола на ту высоту, на которой должна находиться намѣченная точка предмета. Затѣмъ придвигаютъ чертилку

къ матеріалу остріемъ O иглы и намѣчаютъ имъ на забѣленной мѣломъ поверхности матеріала едва замѣтную точку. Если требуется провести горизонтальную линію на матеріалѣ въ вертикальной плоскости на извѣстной высотѣ отъ основанія предмета, то, поднявъ остріе иглы чертилки на данную высоту, двигаютъ весь приборъ около матеріала, и остріе O нанесетъ едва замѣтную линію на матеріалѣ.

Приборомъ, представленнымъ на чертежѣ 177, работаютъ также, какъ и приборомъ, представленнымъ на чертежѣ 176, съ тою лишь разницею, что здѣсь, благодаря дѣленіямъ, прямо подвигаютъ и закрѣпляютъ муфту $Д$ такъ, чтобы передняя плоскость доски $Н$ находилась бы отъ вертикальнаго направленія острія O на данное разстояніе, и затѣмъ, взявъ приборъ въ руки, и прижимая переднюю плоскость доски къ матеріалу, къ его вертикальной или наклонной поверхности, остріемъ O намѣчаютъ необходимыя отдѣльныя точки, или цѣлыя линіи.

Чтобы намѣченныя точки и направленія линій не потерять, ихъ намѣчаютъ послѣ чертилки керномъ, наставляя его остріе въ намѣченныя точки или по направленію линій, и ударяя по верхнему концу его слегка молоткомъ.

Для проведенія на матеріалѣ отвѣсныхъ линій въ вертикальной плоскости ставятъ наугольникъ полочкой $АБ$ (чер. 179) на разбивочный столъ и, приближая его къ забѣленной плоскости матеріала, проводятъ по ней, по ребру $ОН$, заостреннымъ концомъ стальной иглы черту, направленіе которой затѣмъ намѣчаютъ также керномъ. При помощи наугольника проводятъ на матеріалѣ и линіи, перпендикулярныя къ какому-либо ребру и лежащія въ горизонтальной плоскости.



Чер. 180.

При разбивкѣ частей на матеріалѣ пользуются въ широкихъ размѣрахъ и всѣми геометрическими способами построеній на плоскостяхъ линій, угловъ и фигуръ.

Если изготовляемый предметъ не имѣетъ плоскости основанія и онъ небольшихъ размѣровъ, то для разбивки на немъ частей, его зажимаютъ въ слесарные параллельные тиски, и ту плоскость, на которой желаютъ сдѣлать разбивку, устанавливаютъ въ вертикальномъ направленіи.

Приборъ для отысканія центра въ небольшихъ цилиндрическихъ предметахъ *) (чер. 180). Этотъ приборъ состоитъ изъ металлическаго полаго двуграннаго угла $АБКМ$, въ верхней части котораго придѣлана небольшая

*) Этотъ приборъ мы видѣли въ механическихъ мастерскихъ СПб. Технологическаго Института.

пластинка *П*. Въ отверстіи этой пластинки ходитъ по направленію линіи, дѣлящей линейный уголъ *МКД* пополамъ, стальная игла *ба* съ загнутымъ остріемъ. Игла зажимается въ пластинкѣ винтомъ *в*. Чтобы съ помощью этого прибора обозначить центръ въ какомъ-нибудь небольшомъ цилиндрическомъ предметѣ, напримѣръ, въ болтикѣ, кладутъ предметъ въ двугранный уголъ прибора и выдвигаютъ иглу *ба* настолько, чтобы ея остріе *а* приблизительно на глазъ приходилась бы въ центрѣ предмета. Закрѣпивъ затѣмъ иглу винтомъ *в*, прижимаютъ предметъ къ прибору и, приближая его забѣленное мѣломъ основаніе къ острію иглы *а*, нѣсколько вращаютъ весь предметъ, отчего остріе иглы и начертитъ на основаніи предмета небольшой кружокъ, въ которомъ и обозначаютъ керномъ центръ.

Задачи и упражненія.

1) Найти вѣсъ 2 куб. саж. и 3 куб. ф. воды.

2) Кусокъ металич. сплава вѣситъ = 134,784 пуда, а удѣльный вѣсъ его = 7,8. Найти объемъ его.

3) Мѣдный цилиндръ, имѣющій въ окружности основанія $12^4/_7$ дюйм., вѣситъ 31,68 фунт. Найти высоту его, если удѣльный вѣсъ его мѣди 9.

4) Вычислить по таблицѣ (стр. 87-я) вѣсъ листа латуни, толщиною въ $^1/_4$ дюйма, имѣющаго видъ квадрата, сторона котораго = 2 фут.

5) Найти вѣсъ масла, наполняющаго цилиндрическій сосудъ, котораго высота 1 футъ, а радіусъ основ. 6 дюйм. Удѣльный вѣсъ масла 0,9.

6) Вычислить по таблицѣ (стр. 87) вѣсъ свинцоваго листа, толщиною въ $^1/_8$ дюйма и имѣющаго видъ прямоугольника, длиною $^3/_4$ сажени, а шириною $^3/_4$ фута.

7) Найти объемъ 539,136 пуд. желѣза, удѣльный вѣсъ котораго = 8,9.

9) Найти объемъ куска мрамора, вѣсомъ въ 700 пудовъ, съ удѣльнымъ вѣсомъ въ 2,8.

9) Найти вѣсъ кучи (конуса) чистаго песку, высота которой $1^1/_2$ арш., окружность основанія 44 фут., а удѣльный вѣсъ 1,9.

10) Объемъ модели, сдѣланной въ масштабѣ 1 : 100 = 324 куб. дюйма. Найти объемъ самой постройки.

11) Высота Александровской колонны въ С.-Петербургѣ (цилиндрической формы) = 84 фута, діаметръ ея = 14 ф., а удѣльный вѣсъ ея гранита = 2,716. Найти ея вѣсъ.

12) Высота шарового сегмента = 0,42 дюйма, радіусъ основанія = 1,2 д. Найти его полную поверхность.

13) Объемъ одного конуса, радіусъ основанія котораго въ 4 дюйма = 35 куб. фут. Найти объемъ другого подобнаго ему конуса, радіусъ основанія котораго = 12 дюйм.

14) Найти объемъ срытаго косогора, по 6 оставленнымъ столбамъ: въ 3 арш., $3^{1}/_{2}$, $3^{1}/_{2}$, 4, $4^{1}/_{2}$ и $5^{1}/_{2}$ арш.; длина косогора = 15 саж., а ширина = 10 саж.

15) Найти объемъ канавы, длиною въ 12 саж. и 2 ф., шириною по дну въ 1 арш., а по поверхности земли въ $2^{1}/_{2}$ фута, глубина канавы = $3^{1}/_{2}$ ф.

16) Данъ прямоуг. Δ *АБВ*, изъ вершины прямого угла котораго опущенъ $\perp$ *БО* на гипотенузу. Найти длину *БО*, если отрѣзки гипотенузы = 216 фут. и 6 фут.

27) Найти объемъ бочки, если діаметръ ея утора (черт. 168) *АБ* = 1 ар. 2 вер., діаметръ *ВО* ея выпуклости = $1^{3}/_{4}$ ар., а я длина *КМ* = $2^{1}/_{2}$ ар.

18) Клинъ имѣетъ въ основаніи прямоугольникъ, котораго стороны = 3 и $2^{1}/_{2}$ дюйма, а остріе, параллельное основанію, имѣетъ длину 2 дюйма. Найти его объемъ.

19) Вычислить діаметръ чугуннаго ядра вѣсомъ въ 1 фунтъ, если удѣльный вѣсъ чугуна = 7.

20) Найти вѣсъ памятника, имѣющаго такой видъ: основаніе—квадратный параллелепипедъ, сдѣланный изъ известняка; высота основанія въ 1 ар., а ребро основанія = 3 фут. На основаніи поставлена чугунная цилиндрич. колонна, съ радіусомъ основанія въ 6 дюйм. и высотою въ $1^{1}/_{2}$ арш.; на колоннѣ мѣдный шаръ, радіусомъ въ $3^{1}/_{2}$ дюйма. Удѣльный вѣсъ известняка 2; удѣльный вѣсъ мѣди—8,9, а удѣльный вѣсъ желѣза—8,9.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
4	24	часть *абкд*	часть *абКд*.
58	—	Чертежъ 107 представленъ въ обратномъ видѣ.	
59	30	равенъ $1^{1}/_{2}$ куб. саж.	равенъ $^{1}/_{2}$ куб. саж.
64	41	равна $5\,(АБ + аб) \times оН$	равна $\frac{5\,(АБ+аб)}{2} \times оН$
76	15	$+ (n \times P^{7})$	$+ (\pi \times P^{2})$

Печатаются и скоро поступятъ въ продажу слѣдующіе труды В. Корнакова:

1. Краткій практическій курсъ геометріи съ приложеніемъ главнѣйшихъ свѣдѣній по землемѣрію.

2. Извлеченіе квадратныхъ и кубичныхъ корней изъ цѣлыхъ и дробныхъ чиселъ.

3. Какъ чертить различныя фигуры, и что для этого нужно знать.

4. Стѣнныя таблицы для уроковъ азбуки графической грамотности.